

Technische Universität Dresden

**Verhaltensanalyse und Steuerung periodisch und nichtperiodisch  
arbeitender hybrider Systeme**

**Dipl.-Ing. Jörg Krupar**

der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen  
Universität Dresden

zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktoringenieurs**

(Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Leon Urbas

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil Wolfgang Schwarz

Prof. Dr.-Ing. habil Henry Güldner

Prof. Dr.-Ing. Jan Lunze

Tag der Einreichung: 18.7.2007

Tag der Verteidigung: 30.1.2008



*Für meine Eltern*

*Eigentlich weiß man nur, wenn man wenig weiß.  
Mit dem Wissen wächst der Zweifel.  
Johann Wolfgang von Goethe  
Maximen und Reflexionen, 1840*



## **Vorwort**

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik (IEE) der Technischen Universität Dresden.

Besonderer Dank gilt meinem betreuenden Hochschullehrer, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang Schwarz, der mich durch die vielen anregenden und auch kritischen Hinweise sowohl bei der wissenschaftlichen Arbeit als auch bei der Erstellung des Manuskripts unterstützte.

Herrn Hellfeld danke ich für die vielen anregenden Ideen, die wesentlich zum Gelingen der Arbeit beitrugen.

Allen Mitarbeitern der Professur für Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik und den Diplomanden, Studienarbeitern und studentischen Hilfskräften danke ich für die gute Zusammenarbeit die ebenfalls ein wichtiger Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit war.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Jan Lunze danke ich für die wertvollen Hinweise bezüglich des regelungstechnischen Teils der Arbeit.



# Inhaltsverzeichnis

Häufig verwendete Abkürzungen, Symbole und Formelzeichen . . . .	3
<b>1 Einführung</b>	<b>7</b>
1.1 Hybride Systeme . . . . .	7
1.2 Beispiel . . . . .	9
1.3 Stand der Wissenschaft . . . . .	11
1.4 Eigener Beitrag . . . . .	22
1.5 Gliederung der Arbeit . . . . .	24
<b>2 Modelle hybrider Systeme</b>	<b>25</b>
2.1 Allgemeines Systemmodell . . . . .	25
2.2 Gemittelte Modelle . . . . .	32
2.3 Erweiterte gemittelte Modelle . . . . .	41
2.4 Eingebettete Abbildungen . . . . .	52
<b>3 Steuerung und spektrale Bewertung</b>	<b>61</b>
3.1 Zielsetzung . . . . .	61
3.2 Bewertungskriterien . . . . .	62
3.2.1 Messung . . . . .	62
3.2.2 Quantitative Bewertungskriterien . . . . .	64
3.3 Formung des Spektrums durch Modulation . . . . .	85
3.3.1 Eingriffsmöglichkeiten in das System . . . . .	85
3.3.2 Steuerschemata . . . . .	87
3.3.3 Modulationsarten und Realisierungen der entsprechenden Ge- neratoren . . . . .	95

3.4	Applikationen . . . . .	109
3.4.1	periodische Modulation . . . . .	109
3.4.2	Modulation mit Zufallssignalen . . . . .	122
3.4.3	Chaotische Modulation . . . . .	125
<b>4</b>	<b>Statistische Modellerweiterungen und Reglerentwurf</b>	<b>139</b>
4.1	Dichtefunktionen . . . . .	140
4.1.1	Dichteentwicklung des kontinuierlichen Zustands . . . . .	140
4.1.2	Berechnung der stationären Dichte des kontinuierlichen Zustands aus Dichten von Kenngrößen der iterierten Abbildung . . . . .	144
4.2	Stabilitätskriterium für chaotische Systeme . . . . .	147
4.3	Gemittelte Modelle für chaotisches Verhalten . . . . .	148
4.4	Bestimmung von Regler- und Streckenparametern mit Optimierungsverfahren . . . . .	152
4.4.1	Gütefunktional . . . . .	152
4.4.2	Optimierungsbeispiel . . . . .	154
4.4.3	Ergebnisse . . . . .	155
4.5	Impedanzgenerierung mit hybriden Systemen der Leistungselektronik	159
4.5.1	Universelle Wandlerstruktur . . . . .	159
4.5.2	Quasistationäres Eingangsverhalten . . . . .	161
4.5.3	Generierung von Impedanzen . . . . .	162
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>169</b>
5.1	Zusammenfassung . . . . .	169
5.2	Ausblick . . . . .	173

## Häufig verwendete Abkürzungen, Symbole und Formelzeichen

Bezeichnung	Symbol
beliebige Variable	$v$
Konstante	$c$
Zählvariable	$i$
zweite Zählvariable	$l$
dritte Zählvariable	$n$
vierte Zählvariable	$p$
Modulationsgrad	$m$
Momentanfrequenz, Winkelmodulation	$\xi(t)$
Momentanphase, Winkelmodulation	$\eta(t)$
Ordnung (z.B. Momente)	$n$
Dirac-Impuls	$\delta$
Impulsantwort	$h$
Impulsfläche	$A$
Impulsprozeß	$\xi$
Signal	$x$
Übertragungsfunktion	$\mathcal{H}$
Zufallsprozeß	$X$
Zufallsgröße	$x$
Argument bei Zufallsfunktionen	$\xi$
Funktion des kontinuierlichen Teilsystems	$\mathbf{f}$
Lösung der DGL, kont. Teilsystems	$\hat{\mathbf{f}}$
Ausgang kont. Teilsystem	$\mathbf{y}$
selbiges als Skalar	$y$
Ausgabefunktion kont. Teilsystem	$\mathbf{h}$
Stelleingang	$\mathbf{u}$
selbiges als Skalar	$u$
kontinuierlicher Zustand	$\mathbf{x}$

selbiges als Skalar	$x$
Funktion diskretes Teilsystem	$g$
Lösung diskreter Zustand	$\hat{g}$
diskreter Zustand	$q$
diskreter Zustandsspeicher	$D$
Ereignissignal	$e$
Ereignis	$\bar{e}(k)$
Ereignisausgabefunktion	$\Phi_e$
Ereignisgenerator, interne Fkt.	$\phi$
Ereignisgenerator	$\Phi$
Ereignisgenerator, Ausgangssignal	$\varphi$
ext. Regler kont. Funktion	$\mathbf{r}_1$
ext. Abtastregler, Funktion	$\mathbf{r}_d$
ext. Regler	$R$
Lsg. Zust.-Gl. externer Regler	$\hat{\mathbf{r}}_1$
interner Zust. externer Regler	$\mathbf{r}$
Ausgabefunktion externer Regler	$\mathbf{r}_2$
Störeingang kont. Teilsystem	$\mathbf{d}$
selbiges als Skalar	$d$
Modulationssignal	$w$
Impulsformer	$h$
Zeit	$t$
Ereigniszeit	$\bar{i}(k)$
unmittelbar nach einem Ereignis	$\bar{i}_+$
unmittelbar vor einem Ereignis	$\bar{i}_-$
Zeitspanne	$\tau$
Zeitspanne vor Ereignis	$\bar{\tau}(k)$
Ereignisindex	$k$
Zyklusindex	$m$
Zykluslänge	$k_m$
konstante Zeitspanne	$\tau_c$

Dauer diskreter Zyklus	$\tau_m$
Mittelwert beliebiger Größe über einen Umlauf	$v_{m,\tau_m}$
Abb. von gemitteltem Wert auf Anfangswert	$\gamma_v$
kont. Funktion gemittelttes Modell	$\mathbf{f}'$
Arbeitspunkt Ausgangsspannung	$U_{aA}$
Ausgangsspannung Kleinsignal	$\tilde{u}_a$
Ausgangsspannung KS, Ableitung	$\dot{\tilde{u}}_a$
Ausgangsp KS, zweite Ableitung	$\ddot{\tilde{u}}_a$
hybrider Zustand Gesamtsystem	$\mathbf{s}$
eingebettete Abbildung	$H(\bar{\mathbf{s}}(k))$
iterierte Abbildung	$P(\bar{\mathbf{s}}(k))$
Abweichung von einem Wert	$\varepsilon$
AKF eines beliebigen Signals	$s_{vv}$
Beliebige modifizierte Funktion	$\tilde{f}$
Charakteristische Funktion	$\Theta$
Logarithmus naturalis	
der char. Funktion	$\Psi$
Korrelationsfolge	$c_A(k)$
Dichte einer zufälligen Größe	$f_x(\xi)$
Differential	d
Escape rate	$\gamma_{H_\tau}(\tau)$
Excess	$\epsilon_{\bar{i}(k)}$
Erwartungswert	E
Fouriertransformierte	$\mathfrak{F}_T$
Fourierkoeffizienten	$\hat{a}_{1u_a}$
Fourierkoeffizienten exp. Reihe	$c_{iu_a}$
Gütefunktional	$J$
Imaginärteil	Im
Konjugiert komplexe Zahl	$Z^*$

Kumulant	$\kappa_{1\bar{t}}$
Laplace transformierte	$\mathcal{L}(v)$
Laplace transformierte Variable	$\underline{U_e}$
Moment	$m_{1u_a}$
Leistungsdichtespektrum	$S_v$
Projektion Zustand auf Zeitspanne	$\pi_{\bar{t}}(\bar{\mathbf{s}}(k))$
Realteil	Re
Restterm $n$ ter Ordnung	$\mathbf{R}_n$
Welligkeitsfunktion	$\Psi$
Schiefe	$\xi_{\bar{t}(k)}$
Sprungfunktion	$\epsilon(t)$
Standardabweichung	$\sigma_A$
Transponierte	$A^T$
Varianz	$\sigma_{\bar{t}(k)}^2$
Verteilungsfunktion	$F_X$
Wahrscheinlichkeit	$P(\xi)$
Wahrscheinlichkeit	$p$

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Hybride Systeme

Hybride Systeme, Bild 1.1, bestehen aus einem kontinuierlichen Teilsystem und einem diskreten Teilsystem. Beide Teilsysteme wechselwirken miteinander. Der Ausgang  $q$  des diskreten Teilsystems bewirkt im kontinuierlichen Teilsystem ein Umschalten zwischen verschiedenen kontinuierlichen Dynamiken. Der Ausgang  $\mathbf{x}$  des kontinuierlichen Teilsystems dient wiederum als Eingangssignal eines Ereignisgenerators, dessen Ausgangssignal  $e$  Zustandsübergänge im diskreten Teilsystem bewirkt. Derartige

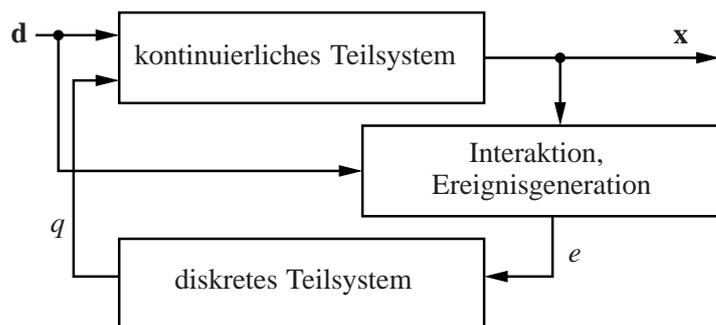


Bild 1.1: Hybrides System.

Systeme finden sowohl in der Elektrotechnik als auch im Maschinenbau und in der Verfahrenstechnik weit verbreiteten Einsatz. Aufgrund der Wechselwirkung der Teilsysteme können die Signale im Gesamtsystem u.a. folgende Merkmale aufweisen:

- Es treten sowohl zeitkontinuierliche als auch zeitdiskrete Signale auf.
- Die zeitdiskreten Signale können sich zu nicht äquidistanten Zeitpunkten ändern.
- Es können auch dann im System chaotische Signale auftreten, wenn alle kontinuierlichen Dynamiken einzeln zu stabilen Systemsignalen führen.

Beim Entwurf und Einsatz hybrider Systeme existieren derzeit noch eine Reihe von Problemen, von denen in dieser Arbeit die folgenden aufgegriffen werden:

- Aufgrund der Wechselwirkung zwischen dem diskreten und dem kontinuierlichen Teilsystem und aufgrund der zu nicht äquidistanten Zeitpunkten stattfindenden Zustandsübergänge des digitalen Teilsystems lassen sich hybride Systeme weder mit klassischen zeitkontinuierlichen Modellen noch mit Modellen für digitale Systeme modellieren. In Kapitel 2 wird ein allgemeines Modell für hybride Systeme entwickelt. In diesem Kapitel werden aus diesem Modell vereinfachte Modelle abgeleitet.
- Aufgrund der sich wiederholenden Zustandsübergänge des diskreten Teilsystems enthält das Signal des kontinuierlichen Teilsystems stets AC-Anteile, die sowohl andere Systeme stören als auch zur Nichteinhaltung von EMV-Normen führen können. Kapitel 3 enthält die Modellierung der auftretenden AC-Anteile und untersucht die Verringerung der spektralen Leistung der AC-Anteile durch modulierende Eingriffe in den Ereignisgenerator.
- Häufig erfordern Anforderungen an die Signale des kontinuierlichen Teilsystems den Einsatz eines zusätzlichen äußeren Reglers, der abhängig vom Zustand des kontinuierlichen Teilsystems den Ereignisgenerator nachstellt. Für den Reglerentwurf existieren derzeit gemittelte Modelle, die auf periodisch arbeitende Systeme mit geringer Amplitude der AC-Anteile im kontinuierlichen Zustand anwendbar sind. In Kapitel 4 werden diese Modelle auf nichtperiodisch arbeitende Systeme erweitert. Weiterhin wird in diesem Kapitel eine andere Methode zur Parametrierung einer Reglerstruktur vorgestellt, die auf nichtperiodisch arbeitende und/oder hybride Systeme mit nicht vernachlässigbaren AC-Anteilen im kontinuierlichen Zustandssignal anwendbar ist.

## 1.2 Beispiel

Im folgenden Beispiel werden die Gründe für den Einsatz hybrider Systeme verdeutlicht. Eine Drehzahlregelung für einen Gleichstrommotor soll realisiert werden. Bild 1.2 zeigt ein einfaches Modell des Motors. Ist kein Drehzahlsensor vorhanden, kann die

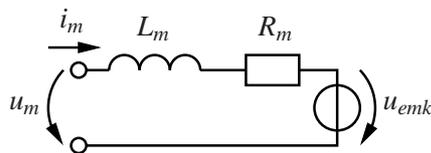


Bild 1.2: Modell des Gleichstrommotors.

Spannung  $u_m$  zur Schätzung der Motordrehzahl verwendet werden. Die Drehzahlregelung ist dann ausgangsseitig eine gesteuerte Spannungsquelle mit der mittleren Ausgangsspannung  $u_{am,T}$ . Zur Erzeugung von  $u_{am,T}$  kann ein kontinuierliches System (Bild 1.3 links) oder ein geschaltetes System (Bild 1.3 rechts) verwendet werden. Mit

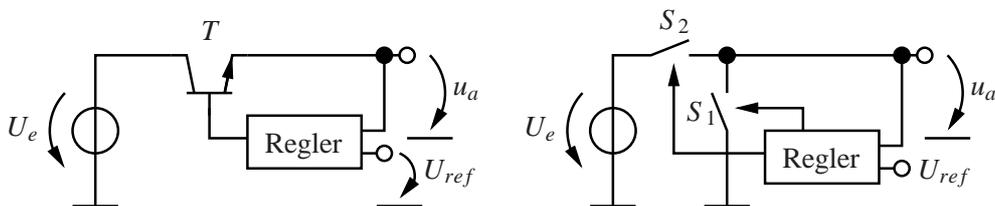


Bild 1.3: Kontinuierlicher und getakteter Motorsteller.

dem kontinuierlichen System kann in Näherung eine Ausgangsspannung  $0 \leq u_a \leq U_e$  erzeugt werden. Die Spannungsdifferenz  $U_e - u_a$  fällt über dem Längselement  $T$  ab. Dadurch entsteht die Verlustleistung  $P_v = (U_e - u_a)i_m$  im Längselement, die durch Kühlung abgeführt werden muß. Ist die Verlustleistung im Regler vernachlässigbar, so beträgt der Wirkungsgrad des Stellers  $\eta = \frac{u_a}{U_e}$ . Eine Rückspeisung von Leistung vom Motor zur Quelle ist nicht möglich.

Beim geschalteten System ist stets einer der beiden Schalter geschlossen. Durch Variation der Aktivierungsdauern kann die Schaltung eine mittlere Ausgangsspannung  $0 \leq u_{am,T} \leq U_e$  erzeugen. Die vorhandene Motorinduktivität  $L_m$  wird zur Mittelung verwendet. Sind die Schalter  $S_1$  und  $S_2$  ideal, so entsteht keinerlei Verlustleistung und

das System hat einen Wirkungsgrad von 100%. Das System ist in der Lage, Energie von der Quelle zum Motor und vom Motor zur Quelle zu übertragen. Das Gesamtsystem enthält bei der geschalteten Variante sowohl diskrete (Schalterstellung) als auch kontinuierliche ( $i_m$ ) Zustände und ist daher ein hybrides System.

Die Realisierung in Form des hybriden Systems hat folgende Vorteile gegenüber der rein kontinuierlichen Realisierung:

- Das Umschalten von Eingangssignalen des kontinuierlichen Zustandsspeichers erlaubt die verlustarme Bereitstellung von einstellbaren kontinuierlichen Signalen  $i_m$  unter Nutzung des Zustandsspeichers  $L_m$  zur Mittelwertbildung. Die hybride und die kontinuierliche Realisierung eines Systems mit ein- und demselben Einsatzzweck besitzen meist den gleichen Zustandsspeicher im kontinuierlichen Teilsystem, so daß dieser ohnehin vorhanden ist. Das kontinuierliche Teilsystem ist bei hybriden Systemen oft einfacher realisiert als bei der rein kontinuierlichen Variante. Dies betrifft insbesondere die Leistungselektronik, wo kontinuierliche Stellglieder durch Schalter ersetzt werden können. Dadurch kann neben der Verlustleistung auch die Größe und Masse des Gesamtsystems verringert werden.
- Die Änderung des diskreten Zustands kann Umschalten zwischen verschiedenen Topologien beinhalten (z.B. Ladungspumpe). Die Topologieumschaltung erlaubt mit Hilfe des Zustandsspeichers das Hochsetzen von Systemsignalen (z.B. Strom und Spannung) über den Wertebereich der Versorgung hinaus. In kontinuierlichen Systemen ist dies nur mit deutlichem Mehraufwand (z.B. Trafo) möglich.
- Viele Regelungen verwenden digitale Rechner. Dann ist es häufig einfacher, direkt den digitalen Ausgang des Rechners als diskreten Zustand zu verwenden, als eine vorherige D/A-Wandlung durchzuführen. Wird der digitale Ausgang als diskreter Zustand genutzt, entsteht ein hybrides System.

Den Vorteilen steht im wesentlichen das Problem gegenüber, daß die kontinuierlichen Zustände des hybriden Systems aufgrund des sich ständig wiederholenden diskreten Zustandswechsels nicht abklingende periodische Komponenten enthalten, die die ord-

nungsgemäße Funktion anderer Systeme beeinträchtigen können, und daß hybride Systeme nicht mit den klassischen Verfahren für rein analoge Systeme entworfen werden können.

Die Temperaturregelung einer Heizung mit einem Bimetallschalter mit Hysterese ist die wohl älteste elektrotechnische Realisierung eines hybriden Systems. Unterschreitet die Momentantemperatur einen unteren Grenzwert, wird die Heizung eingeschaltet. Beim Überschreiten eines Maximalwertes wird die Heizung wieder abgeschaltet.

Das Erreichen des Maximalwertes und des Minimalwertes wird im Ereignisgenerator detektiert und stellt ein Ereignis dar. Der Ereignisgenerator löst beim Eintreten eines Ereignisses einen Zustandsübergang des diskreten Teilsystems aus. Die Dauer, in der der diskrete Zustand unverändert bleibt, wird im folgenden als Aktivierungsdauer bezeichnet.

Der Mittelwert der Temperatur wird durch Einstellung der oberen und unteren Grenze festgelegt. Das älteste aus der Mechanik bekannte hybride System ist ein Wecker nach dem Prinzip einer Wasseruhr aus dem vierten Jahrhundert vor Christi [Pla]. Ein definierter Zufluss an Wasser wurde in einen Becher eingelassen. Erreichte der Becher einen bestimmten Füllstand, kippte dieser um. Das aus dem Becher abfließende Wasser füllte einen zweiten Behälter und verdrängte die Luft in einer daran angeschlossenen Pfeife.

### 1.3 Stand der Wissenschaft

Hybride Systeme lassen sich in zwei Klassen einteilen: diskret gesteuerte kontinuierliche Systeme (discretely controlled continuous systems, DCCS) und geschaltete Systeme (switched systems, SS). Bei DCCS liegen alle stationären Gleichgewichtszustände des kontinuierlichen Teilsystems außerhalb der Intervallgrenzen, die durch den Ereignisgenerator vorgegeben werden. Die stationären Gleichgewichtszustände werden niemals erreicht. Zur ordnungsgemäßen Funktion ist ein ständiges Schalten notwendig. Der DC-DC-Wandler ist ein Beispiel dafür.

Bei SS liegen die Gleichgewichte innerhalb der Intervallgrenzen, so daß diese Sy-

steme im stationären Zustand nicht schalten. Typische Beispiele hierfür sind Schutz- und Begrenzungsschaltungen, die in der Energieversorgung vorkommen [HP02],[His02].

Diese Arbeit ist an der Leistungselektronik orientiert. Viele Systeme der Leistungselektronik werden zur Erhöhung des Wirkungsgrades als hybride Systeme ausgeführt. Dann ist ein sich ständig wiederholender Zustandswechsel des diskreten Teilsystems notwendig, um den kontinuierlichen Zustand in der Umgebung eines vorgegebenen Sollwerts zu halten. Diese Systeme gehören zu den DCCS.

Im Systemverhalten treten zwei Arten von Vorgängen auf:

- **Schnelle Vorgänge:** Innerhalb der Aktivierungsdauern der einzelnen diskreten Zustände treten schnelle Zeitvorgänge auf. Die Grenzen, in denen sich der kontinuierliche Zustand innerhalb einer Aktivierungsdauer bewegt, werden durch Umschaltbedingungen im Ereignisgenerator beeinflusst. Im kontinuierlichen Zustandsraum stellen die Umschaltbedingungen Schaltflächen dar.
- **Langsame Vorgänge:** Betrachtet man z.B. das Einschwingverhalten in einen periodischen Grenzyklus, so benötigt der Einschwingvorgang meist eine große Anzahl von Aktivierungsdauern. Das Einschwingverhalten ist ein im Vergleich zur Aktivierungsdauer langsamer Vorgang. In vielen Anwendungen wird das System nach Bild 1.1 verwendet und ein äußerer Regler hinzugefügt, der abhängig vom kontinuierlichen Zustand den Ereignisgenerator nachstellt. Dieser Regler beeinflusst das Einschwingverhalten und regelt Parameterunsicherheiten im kontinuierlichen Teilsystem und im Ereignisgenerator aus. Der Regler beeinflusst im wesentlichen die langsamen Zeitvorgänge, und wertet dazu den gemittelten kontinuierlichen Zustand aus. Die schnellen Zeitvorgänge haben einen unerwünschten Effekt auf das Reglerausgangssignal. Dieser Effekt ist gering zu halten.

Im folgenden wird die Aktion des Ereignisgenerators als Steuerung, die Art der Ereignisgeneration als Steuerschema und der äußere Regler als Regler bezeichnet.

In gängigen Entwurfsverfahren für die Steuerung und Regelung sind aufgrund des großen Unterschiedes zwischen schnellen und langsamen Vorgängen im Zeitmaßstab der Entwurf des Steuerschemas und der Entwurf des Reglers voneinander entkoppelt. Beim Entwurf des Steuerschemas wird das Reglerausgangssignal als konstant ange-

nommen. Beim Reglerentwurf werden Mittelwerte für den kontinuierlichen Zustand verwendet und die schnellen Zeitvorgänge vernachlässigt.

Hybride Systeme können vielseitiges und kompliziertes Verhalten zeigen. Deshalb ist auch die dazu existierende Literatur recht vielseitig. Diese Arbeit orientiert sich vorrangig an hybriden Systemen der Leistungselektronik. Die hier zusammengefaßte Literatur ist so ausgewählt, daß sie auf diese Art von hybriden Systemen anwendbar ist. Sie läßt sich in folgende Schwerpunkte gliedern:

- Simulation.
- Systemanalyse, Schwerpunkte Stabilität und chaotische Phänomene.
- Systemanalyse, Schwerpunkte elektromagnetische Verträglichkeit (EMV) und Leistungsdichtespektrum.
- Systemanalyse, Schwerpunkt Steuerbarkeit und stationäres Verhalten.
- Reglerentwurf.

Im folgenden wird der Stand der Wissenschaft zu diesen Schwerpunkten zusammengefaßt.

## **Simulation**

Problematisch ist hier die Interaktion zwischen kontinuierlichem und diskretem Teilsystem. Das Finden der exakten Zeiten der Umschalttereignisse ist das Hauptproblem, welches einige Forschungsgruppen beschäftigt [BV92] [Fem96] [MRK97] [HS01] [LY03]. Die Simulation beinhaltet die schnellen und die langsamen Zeitvorgänge. Die Ergebnisse der genannten Veröffentlichungen sind ausschließlich zur Berechnung des zeitlichen Verlaufs der Zustandssignale geeignet.

## **Stabilität und chaotische Phänomene**

Hier wird das stationäre Systemverhalten untersucht. Dazu wird das Reglerausgangssignal meist als konstant approximiert. Dadurch vereinfacht sich die Analyse erheblich. In einigen untersuchten Systemen ist kein Regler enthalten.

[DH90] [TFK96] zeigen mit Meßergebnissen das Auftreten chaotischer Phänomene in DC-DC-Wandlern. [FO96] untersucht die Stabilität von periodischen Orbits eines Abwärtswandlers mit Hilfe von zweidimensionalen eingebetteten Abbildungen und zeigt das Auftreten von Bifurkationen. [HDJ92] [His01b] [His01a] nutzen die iterierte Abbildung zur lokalen Stabilitätsanalyse geschalteter Systeme. [CPB96] [CT97] [BC98] führen ausschließlich Bifurkationsanalysen durch. Die Analyse erfolgt hier generell in stationären Zustand. [CPB96] verwendet dabei transiente Messungen und Simulationen. [CT97] [BC98] analysieren den unregelmäßigen Aufwärtswandler unter Nutzung zweidimensionaler Abbildungen. [CT97] nutzt die Stabilitätsanalyse periodischer Orbits zur Bifurkationsanalyse. [Dea04] zeigt für den Abwärtswandler im Current Programmed Mode, daß sich die zugehörige Abbildung durch eine Reihe von linearen Transformationen in die bereits ausgiebig untersuchte Goetz-Abbildung überführen läßt und nutzt diese zur Analyse des Wandlers. [DT04] zeigt unter Nutzung einer stroboskopischen Abbildung das Auftreten von Horseshoes im Aufwärtswandler im Current Programmed Mode. Die Ergebnisse der angegebenen Literatur erlauben eine Aussage darüber, ob die Steuerung zu periodischem oder chaotischem Verhalten führt. Ein Entwurf der Steuerung oder Regelung ist mit den Ergebnissen nicht durchführbar.

Im Gegensatz zu den oben genannten Veröffentlichungen werden in [BGGV98], [dBV00] und [TR89] Bifurkationsanalysen am DC-DC-Wandler unter Verwendung einer vollständigen Zustandsrückführung durchgeführt. Im Mittelpunkt steht das Auftreten chaotischer Phänomene und Bedingungen, unter denen sich die Stabilität ändert. Die Reglerparametrierung wird hier nur insofern betrachtet, daß diese die Bifurkationspunkte beeinflusst. Ein weitergehender Reglerentwurf wird auch dort nicht durchgeführt.

Eine Vereinfachung der Analyse ist durch Verringerung der Dimension der Abbildung erreichbar. Diese ist durch Idealisierung möglich, wenn im System Zustände existieren, die über einen Umlaufzyklus des diskreten Teilsystems näherungsweise konstant sind und die für die Analyse nicht von primärem Interesse sind. Beim DC-DC-Wandler ist die Ausgangsspannung ein solcher Zustand. Die Idealisierung führt in [Woy01] [FCF04] auf eindimensionale Systeme, die nur noch den Spulenstrom im

Wandler berücksichtigen. Das eindimensionale Modell eignet sich dabei vor allem zur Bifurkationsanalyse und EMV-Analyse. [WGBS00] führt eine statistische Analyse für DC-DC-Wandler im Current Programmed Mode unter Nutzung einer eindimensionalen Abbildung durch. Einsatzparameter, unter denen chaotisches Verhalten auftritt, werden abgeleitet.

Eindimensionale iterierte Abbildungen sind so zum einen für spezielle Analysen hybrider Systeme geeignet. Zum anderen existieren zahlreiche eindimensionale Abbildungen, speziell stückweise lineare Abbildungen, die sich schaltungstechnisch leicht realisieren lassen, um so z.B. einen chaotischen Taktgenerator zu realisieren. Aus diesem Grund existieren im Bereich Elektrotechnik Arbeiten, die speziell die Analyse eindimensionaler Abbildungen zum Ziel haben. [Kil91] liefert Beiträge zur numerischen Ermittlung der stationären Dichte, der Autokorrelationsfunktion und des Ljapunov-Exponenten für eindimensionale Abbildungen. [Isa95] entwickelt analytische Ausdrücke für die invariante Dichte, die Autokorrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum von Markov-Abbildungen. Darüberhinaus werden Abschätzungen für nicht-Markov-Abbildungen ermittelt. Die entwickelten Methoden werden am Beispiel des Aufwärtswandlers im Current Programmed Mode getestet. [Göt98] entwickelt Methoden zur Ermittlung der Dichtefunktion und der Korrelationsfunktion für stückweise lineare Markov-Abbildungen. Für voll streckende Abbildungen werden analytische Ausdrücke ermittelt. [WWM<sup>+</sup>01] nutzt diese Ergebnisse zur Analyse des Aufwärtswandlers im Current Programmed Mode. [BD95] widmet sich dem Entwurfsgedanken. Ziel ist hier der Entwurf einer eindimensionalen Abbildung mit vorgegebener invarianter Dichte. Obwohl viele der genannten Veröffentlichungen auch Leistungsdichtespektren zeigen, bleiben für den Entwurf wichtige Probleme, wie z.B. Zusammenhänge zwischen Parametern der iterierten Abbildung und spektralen Eigenschaften des kontinuierlichen Zustandssignals offen.

### **EMV und Leistungsdichtespektrum**

Hier sind die Bestrebungen auf die Analyse/Synthese spektraler Eigenschaften des kontinuierlichen Zustands gerichtet. Dabei sind zwei gegensätzliche Anwendungen zu unterscheiden. Eine Anwendung bezieht sich auf das Ausgangssignal von Frequenz-

umrichtern und D-Verstärkern. Diese Anwendung hat zum Ziel, die Amplitude der im Eingangssignal enthaltenen AC-Komponenten (Nutzsignale) im kontinuierlichen Zustand zu maximieren, während alle intern generierten AC-Komponenten zu minimieren sind.

[SM02] entwickelt einen speziellen Modulator für D-Verstärker, so daß im Basisband des Ausgangssignals nur noch die AC-Komponenten des Eingangssignals enthalten sind. [SBRS04] entwirft eine optimale Ansteuersequenz für Frequenzumrichter, die den Anteil der Signalgrundfrequenz maximiert und den aller anderen AC-Komponenten minimiert.

Die andere Anwendung bezieht sich auf die EMV. Ein wichtiges Bewertungskriterium zur Beurteilung der EMV ist das Leistungsdichtespektrum bzw. das Amplitudenspektrum des kontinuierlichen Zustands und des Stroms der Versorgungsleitungen des Systems [Kra00] [IEC]. Hier ist sicherzustellen, daß alle im Signal enthaltenen AC-Komponenten unterhalb einer vorgegebenen Grenzkurve liegen [Emi]. Solange diese Bedingung erfüllt ist, sind einzelne AC-Komponenten nicht von Interesse.

In leistungselektronischen Systemen ist es fast immer erforderlich, Einfluß auf das Leistungsdichtespektrum zu nehmen, um bestehende EMV-Anforderungen zu erfüllen. Dazu werden drei Methoden eingesetzt:

### **Filterung der Signale**

Dies ist die klassische Methode zur Verringerung von AC-Komponenten. Zum Einsatz kommen sowohl passive Filter [WCLvW05] als auch aktive Filter [RME95] [WMK<sup>+</sup>95] [KTD05] [Aka05]. Die Theorie der Filterung ist erschlossen. Veröffentlichungen zur Filterung beinhalten praktische Realisierungen und die Analyse und Minimierung parasitärer Effekte. Bei leistungselektronischen Systemen sind die Filter im Leistungsteil wirksam und deshalb recht teuer.

### **Pulsformung**

Bei der Pulsformung wird ausschließlich der Verlauf der Umschaltflanken beeinflusst. Das heißt die Pulsformung stellt einen Eingriff in das kontinuierliche Teilsystem dar, der nur unmittelbar während der Schaltvorgänge wirksam ist. Pulsformung ermöglicht,

Leistung aus höheren Frequenzen auf Anteile niedriger Frequenzen umzuverteilen. Die gesamte Wechselleistung bleibt dabei unverändert. Die Veränderung des Verlaufs der Umschaltflanken ist mit zusätzlicher Verlustleistung in den Leistungsbau-elementen während des Umschaltvorgangs verbunden. Pulsformung wird deshalb hauptsächlich bei niedrigen Leistungen in integrierten Schaltungen in speziellen Applikationen eingesetzt [GRB05].

### **Modulation der Umschaltereignisse**

Die Modulation der Umschaltereignisse entspricht in Bild 1.1 der Erweiterung des Ereignisgenerators um einen oder mehrere Eingänge, die ein Modulationssignal erhalten. Dieses beeinflusst in einer durch den Ereignisgenerator festlegbaren Weise die Umschaltzeitpunkte und damit die (Leistungsdichte-) Spektren des kontinuierlichen Zustands. Dabei werden zur Modulation periodische, chaotische und auch zufällige Signale benutzt. Für spezielle Modulationssignale und spezielle Verläufe des kontinuierlichen Zustands sind hier teilweise umfangreiche Untersuchungen zu finden. Darüber hinaus besteht bei einigen Systemen die Möglichkeit, durch gezielten Eingriff in den Ereignisgenerator chaotisches Verhalten hervorzurufen, so daß das Signal bereits ohne äußere Modulation kontinuierliche spektrale Anteile erhält. 3 Modulationsarten lassen sich unterscheiden.

- Periodische Modulation

In [HFB94] wird erstmalig ein Taktgenerator entworfen, der mit einem Sinus-, Dreieck- oder exponentiellen Signal eine Frequenzmodulation an einem Rechtecksignal durchführt, um so einen Takt mit gespreiztem Spektrum zu erzeugen. [HFB97] stellt einen gleichartigen Taktgenerator zur Taktung von Mikroprozessoren vor. In [Cyp] ist ein entsprechendes kommerzielles Produkt zu finden. [BDG<sup>+</sup>05] moduliert das Taktsignal eines DC-DC-Wandlers nach dieser Methode. Untersuchungen zur Bestimmung der Ansteuersequenzen mit Hilfe von Optimierungsverfahren existieren noch nicht.

- Chaotische Modulation

Hier wird der zusätzliche Eingang des Ereignisgenerators mit dem Ausgangssignal einer chaotischen iterierten Abbildung gespeist [SBR00]. Die Berechnung des Lei-

leistungsdichtespektrums muß meist mit Hilfe einer Zeitreihenanalyse [MSK96] erfolgen, was mit relativ hohem numerischen Aufwand verbunden ist. [SBR00] zeigt Messungen für chaotisch generierte Taktsignale. [BMSW00] moduliert einen DC-DC-Wandler mit Hysteresesteuerung mit einer chaotischen iterierten Abbildung und vergleicht dabei das Leistungsdichtespektrum für verschiedene Abbildungen. [WWG03] berücksichtigt zusätzlich die Restwelligkeit des Ausgangssignals und versucht, einen Kompromiß zwischen der Restwelligkeit des Spulenstroms und der maximalen Leistungsdichte zu finden. Das für den Entwurf wichtige Problem, welche Parameter der iterierten Abbildung zu verändern sind, um bestimmte spektrale Eigenschaften zu erzielen, bleibt weitgehend offen.

Für Spezialfälle ist auch bei chaotischer Modulation eine Vereinfachung der Analyse möglich. So wird in [Isa95] [IW97] eine Methode zur Approximation des Leistungsdichtespektrums mit Hilfe analytischer Ausdrücke für stückweise lineare Markov-Abbildungen entwickelt. Für voll streckende stückweise lineare Abbildungen berechnet [BS03] analytische Ausdrücke für die charakteristische Funktion und damit für das Leistungsdichtespektrum. Die Ergebnisse können als Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen zur Parametrierung der Abbildung auf vorgegebene spektrale Eigenschaften für Spezialfälle dienen.

In [RSC02] wird gezeigt, daß bei sich langsam änderndem Modulationssignal das Leistungsdichtespektrum nur noch von der stationären Dichte des Modulationssignals abhängt. [CRS03b] gibt analytische Ausdrücke für das Leistungsdichtespektrum in diesem Fall an. Aufgrund der Einschränkung auf die langsame Modulation ist die Anwendbarkeit dieser Ergebnisse auf wenige Spezialfälle beschränkt.

Wird statt des iterierten Wertes der chaotischen Abbildung ein aus diesem abgeleiteter diskretisierter Wert benutzt, sind aufeinanderfolgende Modulationswerte wieder durch eine Markov-Kette beschreibbar und die Analyse aus [SVP95] ist verwendbar. In [SRS03] erfolgt diese Diskretisierung in Form eines Binärsignals. [BSRS04] gibt für diesen Fall bei Gleichverteilung einen analytischen Ausdruck für das Leistungsdichtespektrum an. In [BRS03] erfolgt eine gezielte Verstärkung und Begrenzung des Modulationssignals. Diese wird genutzt, um das Leistungsdichtespektrum zu formen. Abschätzungen oder analytische Ausdrücke können für diesen Fall jedoch nicht ermit-

telt werden.

Soll chaotische Modulation in hybriden Systemen Einsatz finden, erwächst die Notwendigkeit der Realisierung chaotischer Taktgeneratoren. Diese werden in [Kil91] [PvJ01] [MPRS04] meist mit iterierten Abbildungen entworfen. [PvJ01] verwendet dazu einen Sigma-Delta Modulator. [Kil91] verwendet eine Realisierung der Renyi-Map, die durch ein System ähnlich dem Aufwärtswandler im Current Programmed Mode realisiert wird. [MPRS04] nutzt einen Generator auf der Basis einer nichtlinearen Abbildung zur Ansteuerung eines VCO. Diese Veröffentlichungen beinhalten ausschließlich schaltungstechnische Ideen. Ein systematischer Entwurf wird dort nicht vorgestellt.

- Modulation mit Zufallssignal

Wird statt des chaotischen Signals ein Zufallssignal benutzt, so vereinfacht sich die Analyse erheblich, wenn aufeinanderfolgende Werte des Modulationssignals unabhängig sind. Für spezielle Prozesse lassen sich analytische Ausdrücke finden. [Sta93] stellt ein umfangreiches Werk zur statistischen Analyse für diesen Fall in der Leistungselektronik dar. Neben der Methodik zur Analyse statistischer Kenngrößen untersucht der Autor die Auswirkung verschiedener Implementationen des Ereignisgenerators auf das Leistungsdichtespektrum. [SVP95] beschäftigt sich speziell mit der Untersuchung der Auswirkung verschiedener Implementationen des Ereignisgenerators auf das Leistungsdichtespektrum. In [HSS<sup>+</sup>98] werden die Ansätze für den Ereignisgenerator aus [SVP95] benutzt und die Ergebnisse unter Berücksichtigung des Einflusses der Modulation auf die Restwelligkeit des kontinuierlichen Zustands beurteilt. [SHS<sup>+</sup>00] erhält analytische Ausdrücke für das Leistungsdichtespektrum eines DC-DC-Wandlers im nichtlückenden Betrieb, wenn das PWM-Signal ein binomialverteiltes Zufallssignal ist. Für den lückenden Betrieb werden diese Untersuchungen in [ThCHS00] durchgeführt. [SLA02] führt statistische Untersuchungen für den Fall durch, daß die Generierung der Ansteuersequenz mit einer Markov-Kette modellierbar ist.

Die Realisierung eines echten Zufalls-Taktgenerators ist in [GJ02] zu finden. Hier wird das thermische Rauschen eines Widerstandes verstärkt und als Modulationssignal für einen Oszillator benutzt. In der Regel werden Taktgeneratoren für Zufallstakt jedoch als Pseudo-Zufallsgeneratoren mit Chaosgeneratoren realisiert. [CRS02]

[CRS03a] nutzt die Nichtlinearität einer Stufe eines Pipelined ADC als nichtlineare Abbildung aus. Das rückgekoppelte und über den ADC diskretisierte Ausgangssignal ist dann ein Zufallssignal, dessen Generator sich durch Markov-Ketten modellieren läßt. Die Modulation mit einem Zufallssignal wird hier nur aus Gründen der Vollständigkeit erwähnt. Die Analyse solcher Signale kann als weitestgehend erschlossen angesehen werden. Die schaltungstechnische Realisierung von Zufallsgeneratoren stellt insbesondere im Bereich höherer Ausgaberraten noch ein Problem dar.

- Nutzung von chaotischem Systemverhalten zur Veränderung des Leistungsdichtespektrums

Bei bestimmten Realisierungen des Ereignisgenerators entsteht chaotisches Systemverhalten. Dieses wird in vielen Applikationen durch zusätzliche Maßnahmen unterbunden [KSV91] [Eri97]. Andererseits kann das chaotische Verhalten direkt zur Formung des Leistungsdichtespektrums genutzt werden. Dieser Gedanke wird in [Woy01] [BGS<sup>+</sup>02] aufgegriffen. [Woy01] beläßt den DC-DC-Wandler dadurch im chaotischen Betrieb, daß die Stabilisierungsrampe weggelassen wird und untersucht, unter welchen Bedingungen Chaos auftritt. Für ganzzahlige Vielfache von  $U_a/U_e$  nutzt [BS02] die Ergebnisse von [Göt98] und entwickelt einen analytischen Ausdruck für das Leistungsdichtespektrum.

In [BGS<sup>+</sup>02] wird die Systemabbildung durch Variation des Anstieges der Stabilisierungsrampe verändert. Dadurch wird sowohl die Restwelligkeit des kontinuierlichen Zustands als auch das Leistungsdichtespektrum beeinflusst. Diese Vorgehensweise ermöglicht eine begrenzte Beeinflussung spektraler Eigenschaften mit minimalem Realisierungsaufwand.

### **Systemanalyse, Schwerpunkt Steuerung und stationäres Verhalten**

Hier wird wie bei den Untersuchungen von chaotischen Phänomenen das Reglerausgangssignal als konstant angenommen. Dann vereinfacht sich die Analyse erheblich. In einigen Anwendungsfällen ist kein Regler erforderlich. [MJE96] und [ZL02] manipulieren das diskrete Teilsystem und den Ereignisgenerator, um bei rein periodischem Verhalten spezielle Abhängigkeiten kontinuierlicher Zustandsvariablen vom Stelleingang im stationären Zustand zu erhalten. [SEK03] und [Kam04] untersuchen die Stabi-

lität rein ereignisgesteuerter Systeme. Darüberhinaus entwickelt [Kam04] Ansätze für die Anfahrsteuerung ereignisgesteuerter Systeme. [VOS02] beeinflusst den Ereignisgenerator zur Verbesserung des dynamischen Verhaltens des Systems, d.h. zur Optimierung der Antwort des kontinuierlichen Zustands auf das Stellsignal. [HR94] erweitert die Systemstruktur um einen weiteren Energiespeicher zur Verbesserung der Sprungantwort/Systemdynamik. Für Systeme, die sich zu einer Gruppe zusammenfassen lassen bzw. durch Transformationen ineinander überführen lassen, ist eine einheitliche Analyse anwendbar. [AQB02] zeigt diese einheitliche Analyse im eingeschwungenen Zustand für eine Klasse von DC-DC-Wandlern. Eine einheitliche Entwurfsmethodik wird jedoch nicht angegeben.

### **Reglerentwurf**

Beim Reglerentwurf werden nur die langsamen Zeitvorgänge berücksichtigt. Zum Entwurf kontinuierlicher Regler wird das System durch Bildung von Zeitmittelwerten durch ein zeitkontinuierliches äquivalentes Modell approximiert [Eri97][KSV91]. Der Reglerentwurf erfolgt hier mit Methoden für kontinuierliche Systeme [KMAO] [YS00]. Aufgrund der Welligkeit des kontinuierlichen Zustands, die durch den Regler zu einer Welligkeit des Stelleingangs führt, treten Abweichungen zwischen dem gemittelten Systemverhalten und dem Verhalten des gemittelten Modells auf. Im periodischen Betrieb existiert inzwischen eine recht genaue Modellierung für vernachlässigbare Welligkeiten [BK05][BK06]. Aufgrund der Komplexität der Modelle ist die Analyse jedoch auf numerische Methoden beschränkt.

Das Problem der Welligkeit behob eine Gruppe von Wissenschaftlern für den periodischen Betrieb durch folgende Erweiterung des gemittelten Modells: Dem gemittelten Signal wird eine zeitlich periodische Funktion (Welligkeitsfunktion) überlagert, die die Abweichung des kontinuierlichen Zustands vom Mittelwert beschreibt [KBBL90] [LB96b] [LB96a]. Die Welligkeitsfunktionen werden in der genannten Literatur durch Approximation des langsamen Vorganges durch ein zeitlich stückweise lineares Signal berechnet. Die Länge der linearen Stücke ist die Länge eines Umlaufzyklusses des diskreten Teilsystems. Das so erhaltene erweiterte Modell ist jedoch nur noch mit geschlossener Regelschleife im Zeitbereich analysierbar und verliert dadurch an Wert

für den Entwurf. [CVS99] [WKF02] schlägt die Approximation der Welligkeitsfunktion durch eine Fourierreihe endlicher Ordnung vor. Bei hybriden Systemen ist jedoch zur Analyse eine hohe Genauigkeit an den Umschaltereignissen wichtig. Da die Ableitung des kontinuierlichen Zustands an den Umschaltereignissen unstetig ist, erfordert diese Methode für hinreichende Genauigkeit eine hohe Abbruchordnung der Reihe, wie aus den Ergebnissen von [CVS99] [WKF02] ersichtlich ist. Aufgrund des damit verbundenen hohen Rechenaufwandes ist diese Art der Modellierung eher inpraktikabel.

Für nichtperiodischen Betrieb existieren derzeit keine Modelle für Welligkeitsfunktionen. Zusätzlich führt der nichtperiodische Betrieb speziell in den genaueren gemittelten Modellen zu einem instabilen Modell [KSV91]. Solange nichtperiodischer Betrieb vorliegt, läßt sich das Gesamtsystem durch den Reglerentwurf nicht stabilisieren. Dann ist kein Reglerentwurf mit den betreffenden Modellen möglich.

In diesem Fall werden für den Entwurf sehr grobe Modelle [Eri97] verwendet. Meist wird der nichtperiodische Betrieb in der Anwendung durch Modifikation des Ereignisgenerators vermieden.

Einen anderen Ansatz verfolgt [GPM04]. Ein DC-DC-Abwärtswandler dient als Beispielsystem. Das System wird als zeitdiskretes System beschrieben und eine selbstoptimierende Steuerung entwickelt. Das Ergebnis ist eine Steuerung, die das Stell-signal aus dem erwarteten zukünftigen Verhalten unter Berücksichtigung des Großsignalverhaltens in jedem einzelnen Takt neu berechnet. Es werden minimale Einschwingzeiten erreicht. Die Anwendbarkeit ist jedoch durch den hohen Rechenaufwand in Frage gestellt.

## 1.4 Eigener Beitrag

In den vorher genannten bereits existierenden Untersuchungen bestehen noch einige Lücken, von denen durch diese Arbeit die folgenden geschlossen werden sollen:

- Bei chaotischer Taktung ist der Zusammenhang zwischen der benutzten Abbildung des Taktgenerators und dem Leistungsdichtespektrum sehr komplex und kann bis auf die wenigen genannten Spezialfälle nur numerisch ermittelt wer-

den. Die Arbeit liefert Beiträge zur Ermittlung statistischer Kenngrößen der generierten Taktsignale und stellt ein Kriterium zur qualitativen Abschätzung von Eigenschaften des Leistungsdichtespektrums zur Verfügung. Verschiedene Fälle der chaotischen und periodischen Modulation werden untersucht.

- Für häufig vorkommende Spezialfälle von Zeitverläufen des kontinuierlichen Zustands werden statistische Kenngrößen berechnet, die beim Reglerentwurf und bei der Systemparametrierung Verwendung finden.
- Bei periodischer Modulation existieren nur Untersuchungen zu speziellen Modulationssignalen. In dieser Arbeit werden verschiedene quantitative Gütekriterien zur Bewertung des Leistungs(dichte)spektrums vorgestellt, die bestehende EMV-Anforderungen berücksichtigen. Unter Nutzung dieser Kriterien werden Optimierungsmethoden zur Optimierung von parametrisierten und auch von nicht parametrisierten Modulationssignalen (arbitrary waveforms) entwickelt und an einem Beispielsystem zur Generierung optimierter periodischer Ansteuersequenzen genutzt.
- Für den Entwurf von chaotischen Modulationsschemata wird zum einen eine Methode zum effizienten Schaltungsentwurf beliebiger stückweise linearer Abbildungen vorgestellt. Zum anderen werden Methoden zur effizienten Abschätzung des Leistungsdichtespektrums vorgestellt, die die Parametrierung auf bestimmte spektrale Eigenschaften des Systems effektiver machen können.
- Verschiedene Varianten des Modulationseingriffs und deren Wechselwirkung mit der Regelung/Stellgröße werden untersucht. Weiterhin werden Steuerschemata vorgestellt, die die Wechselwirkung zwischen Modulation und Regelung minimieren. Dies erlaubt den separaten Entwurf von Modulationsstrategien und Regelung.
- Für den Reglerentwurf existieren derzeit nur Methoden und Modelle für periodisch arbeitende hybride Systeme. In der Arbeit werden Modelle und Methoden zum Reglerentwurf nichtperiodisch arbeitender hybrider Systeme vorgestellt.

## 1.5 Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 wird zunächst ein allgemeines Systemmodell eingeführt, welches die vollständige Modellierung des Verhaltens von DCCS erlaubt. Weiterhin werden in diesem Kapitel die gemittelten Modelle und deren Erweiterungen zusammengefaßt. Der größte Teil der Arbeit nutzt eingebettete Abbildungen und iterierte Abbildungen. Die Berechnung der iterierten Abbildungen aus dem allgemeinen Modell sowie die Systemmodellierung mit iterierten Abbildungen wird ebenfalls in Kapitel 2 beschrieben.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit AC-Störkomponenten in hybriden Systemen. Nach einer kurzen Beschreibung der Ursachen werden bestehende Meßkriterien zur Beurteilung der EMV zusammengefaßt. Anschließend erfolgt die Berechnung von Kenngrößen zur Bewertung der EMV in der Entwurfsphase hybrider Systeme. Unter Nutzung dieser Kenngrößen werden sowohl qualitative Methoden zur groben effizienten Bewertung der Störabstrahlung in der Entwurfsphase als auch quantitative Kriterien zur Systemparametrierung auf minimale Störabstrahlung ermittelt. Das Kapitel stellt ein mögliches Optimierungsverfahren zur Parametrierung von Modulationssequenzen sowie ein Werkzeug zum effizienten Entwurf stückweise linearer Abbildungen zur Realisierung von Chaosgeneratoren vor. In Kapitel 3 wird eine äußere Regelung  $R$  nicht berücksichtigt bzw. als Ausgabe von konstanten Größen im stationären Zustand idealisiert.

Die Verhaltensmodellierung mit realer Regelung  $R$  sowie deren Entwurf werden in Kapitel 4 behandelt. Zunächst werden statistische Kenngrößen berechnet, die im Reglerentwurf verwendbar sind. Dann erfolgt die Herleitung gemittelter Modelle für nichtperiodischen Betrieb. Anschließend wird unter Nutzung von iterierten Abbildungen eine Optimierungsmethode vorgestellt, die zur Parameterbestimmung hybrider Systeme bei vorgegebener Struktur auf schnelles Einschwingen geeignet ist. Die Methode nutzt statistische Kenngrößen und ist dadurch zur Optimierung von periodisch und auch chaotisch arbeitenden Systemen verwendbar. Das Kapitel stellt abschließend die Generierung beliebiger Impedanzen und UI-Kennlinien mit hybriden Systemen der Leistungselektronik vor.

# Kapitel 2

## Modelle hybrider Systeme

### 2.1 Allgemeines Systemmodell

#### Modell

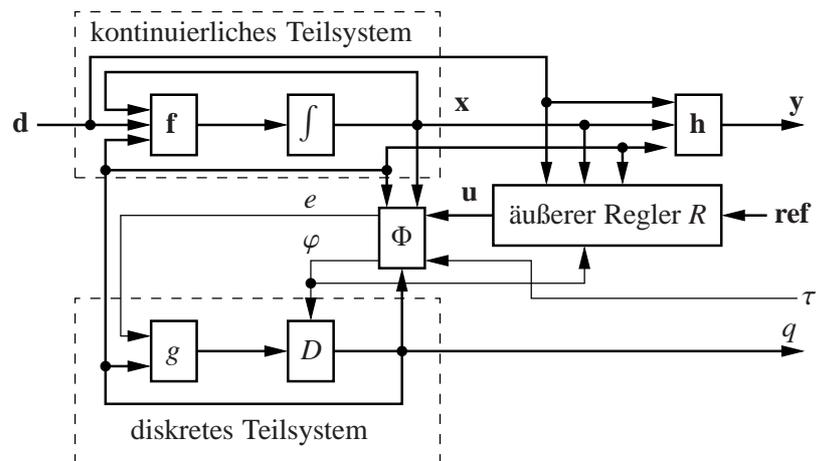


Bild 2.1: Hybrides System.

Bild 2.1 zeigt das Systemmodell, welches als Grundlage für die gesamte Arbeit dient. Es besteht aus einem kontinuierlichen Teilsystem, einem diskreten Teilsystem und einem Ereignisgenerator  $\Phi$ . Darüberhinaus besitzen einige DCCS noch einen äußeren Regler  $R$ , der entweder den kontinuierlichen Zustand  $\mathbf{x}$  oder das kontinuierliche Ausgangssignal  $\mathbf{y}$  regelt. Der Eingang  $\mathbf{d}$  ist ein zusätzlicher Eingang, der zur Modellierung von äußeren Einflüssen auf das kontinuierliche Teilsystem dient.  $\tau$  ist die seit

dem Eintreten des letzten Ereignisses vergangene Zeit.

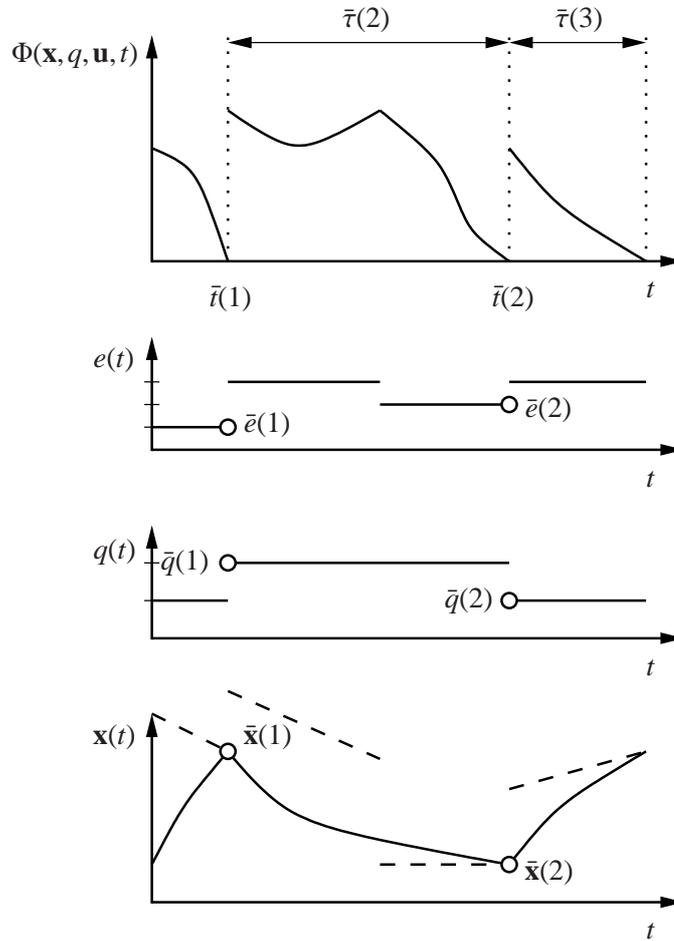


Bild 2.2: Verläufe der Signale eines hybriden Systems.

Für ein Beispiel mit eindimensionalem kontinuierlichen Teilsystem sind die Verläufe der Signale in Bild 2.2 dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist hier der Regler  $R$  nicht berücksichtigt.

$\bar{\tau}(k)$  ist die vom Eintreten des  $k-1$ -ten Ereignisses bis zum Eintreten des  $k$ -ten Ereignisses vergangene Zeit. Das kontinuierliche Teilsystem wird durch die Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, q, \mathbf{d}) \quad (2.1)$$

und die Ausgabefunktion

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, q, \mathbf{d}) \quad (2.2)$$

beschrieben. In vielen hybriden Systemen gilt  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, q, \mathbf{d}) = \mathbf{x}$ . Auf diese Systeme konzentriert sich diese Arbeit. Bei Änderung von  $q$  ändert sich  $\dot{\mathbf{x}}$ , d.h.  $\dot{\mathbf{x}}$  ist in der Regel unstetig.  $\mathbf{x}$  selbst ist jedoch stets stetig. Das diskrete Teilsystem wird mit

$$q(\bar{t}_+) = g(q(\bar{t}_-), e(\bar{t}_-)) \quad (2.3)$$

modelliert. In der verwendeten Schreibweise bedeutet ein Querstrich über einer Variablen stets deren Wert zum Zeitpunkt eines Ereignisses.  $\bar{t}_-$  ist die Zeit unmittelbar vor dem Auftreten des Ereignisses  $\bar{e}(k)$  und  $\bar{t}_+$  die Zeit unmittelbar danach. Für  $\bar{t}(0) = 0$  läßt sich der Zeitpunkt des Auftretens des  $k$ -ten Ereignisses mit

$$\bar{t}(k) = \sum_{i=1}^k \bar{\tau}(i) \quad (2.4)$$

berechnen. Wird später der Ereigniszeitpunkt  $\bar{t}(k)$  verwendet, so wird immer von  $\bar{t}(0) = 0$  ausgegangen. Die Zeitspanne zwischen zwei Ereignissen (Aktivierungsdauer) ist:

$$\bar{\tau}(k) = \bar{t}(k) - \bar{t}(k-1) .$$

Zustandsübergänge des diskreten Teilsystems werden durch das Auftreten von Ereignissen, die der Ereignisgenerator generiert, initialisiert.  $k$  ist dabei der Zählindex für die auftretenden Ereignisse. Das Auftreten von Ereignissen im Ereignisgenerator  $\Phi$  wird durch die implizite Gleichung

$$\Phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{q}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\tau}) = 0 \quad (2.5)$$

beschrieben. Die Struktur des Ereignisgenerators ist in Bild 2.3 dargestellt. Darin definiert jedes  $\phi_i$  eine (zeitvariante) Schaltfläche. Die Freigabe definiert, welche Schaltflächen im Zustand  $q$  zu einem Zustandsübergang des diskreten Teilsystems führen können:

$$\phi_i \begin{cases} \text{ist aktiv} & \text{wenn } g(q, i) \neq q \\ \text{ist inaktiv} & \text{wenn } g(q, i) = q \end{cases} .$$

Der Ausgang  $\varphi$  ist der kleinste Ausgabewert der ausgewählten Umschaltfunktionen:

$$\varphi = \Phi(\mathbf{x}, q, \mathbf{u}, \tau) = \min_i \phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) : g(q, i) \neq q . \quad (2.6)$$

Der Ereignisgenerator wird im folgenden so definiert, daß  $\Phi(\mathbf{x}, q, \mathbf{u}, \tau) \geq 0$  stets erfüllt ist. Das Erreichen des Wertes  $\varphi = 0$  verursacht einen Zustandsübergang des diskreten

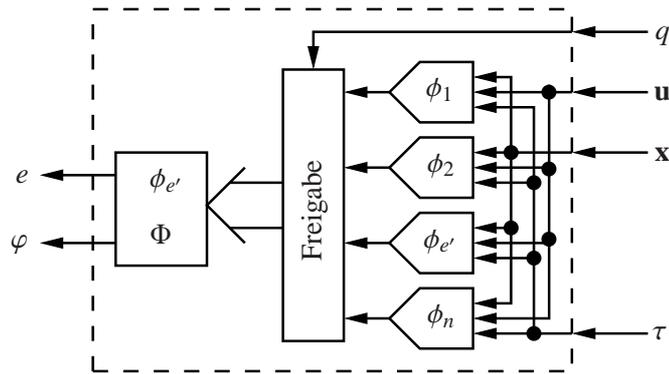


Bild 2.3: Ereignisgenerator.

Teilsystems nach Gl. (2.3). Das ausgegebene Ereignis  $e = \Phi_e(\mathbf{x}, q, \mathbf{u}, \tau,)$  ist der Index derjenigen freigegebenen Schaltfunktion, die den minimalen Ausgabewert erreicht:

$$e = \arg \min_i \phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) . \quad (2.7)$$

Der Regler  $R$  ist entweder ein statisches oder ein kontinuierliches dynamisches oder getaktetes Teilsystem. Bei kontinuierlichen Reglern, Bild 2.4, gelten die Modellgleichungen:

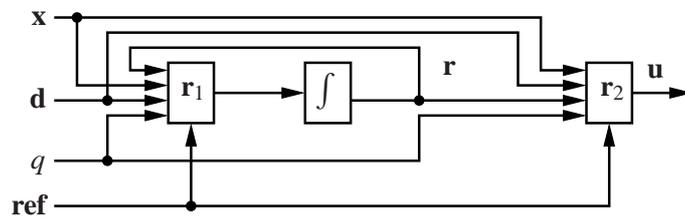


Bild 2.4: Kontinuierlicher Regler.

chungen:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_1(\mathbf{r}, \mathbf{x}, q, \mathbf{d}, \mathbf{ref}) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_2(\mathbf{r}, \mathbf{x}, q, \mathbf{d}, \mathbf{ref}) . \quad (2.9)$$

In diesen Gleichungen stellt die Abhängigkeit von  $\mathbf{d}$  eine überlagerte Störgrößen-aufschaltung dar. Rein statische Regler enthalten nur den Block  $\mathbf{r}_2$  und werden vollständig durch  $\mathbf{u} = \mathbf{r}_2(\mathbf{x}, q, \mathbf{d}, \mathbf{ref})$  modelliert. Abtastregler (Bild 2.5) sind durch Gl. (2.10) modellierbar:

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{r}_d(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k-1), \bar{q}(k), \bar{\mathbf{d}}(k), \bar{\mathbf{ref}}(k)) . \quad (2.10)$$

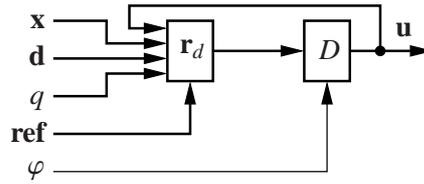


Bild 2.5: Abtastregler.

Erreicht der diskrete Zustand nach  $k_m$  Ereignissen wieder seinen ursprünglichen Wert, wird das Verhalten bis zum Wiedererreichen des ursprünglichen diskreten Zustands im folgenden als Zyklus bezeichnet. Der Zyklus erhält den Index  $m$ . Es gilt

$$\pi_q(\bar{\mathbf{s}}(m+1)) = \pi_q(\bar{\mathbf{s}}(m)), \quad (2.11)$$

wobei

$$\bar{\mathbf{s}}(m) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(m) \\ \bar{q}(m) \\ \bar{\tau}(m) \end{pmatrix}$$

der hybride Zustand bestehend aus dem kontinuierlichen Zustand, dem diskreten Zustand und der seit dem letzten Ereignis vergangenen Zeit ist.  $\pi_q(\bar{\mathbf{s}}(m))$  ist die Projektion des hybriden Zustands auf den diskreten Zustand, d.h.:

$$\bar{q}(m+1) = \bar{q}(m). \quad (2.12)$$

$k_m$  ist dann die Länge des Zyklusses, d.h. die Anzahl der Ereignisse bis zum Wiederauftreten des ursprünglichen diskreten Zustands.  $\tau_m$  ist die entsprechende Zyklusdauer.

Das hier vorgestellte Modell gibt das Verhalten von DCCS vollständig wieder. Aus dem Modell lassen sich alle nachfolgend aufgeführten vereinfachten Modelle ableiten.

### Beispiel

Ein Aufwärtswandler im Current Programmed Mode (CPM) (Bild 2.6: Schaltung, Bild 2.7: Blockschaltbild) ist zu modellieren. Das Flip-Flop wird mit einem periodischen Taktsignal mit der Periode  $\tau_c$  gesetzt. Tabelle 2.1 zeigt die möglichen diskreten Zustände und die im Wandler auftretenden Ereignisse. Die Zustandsüberführungs-

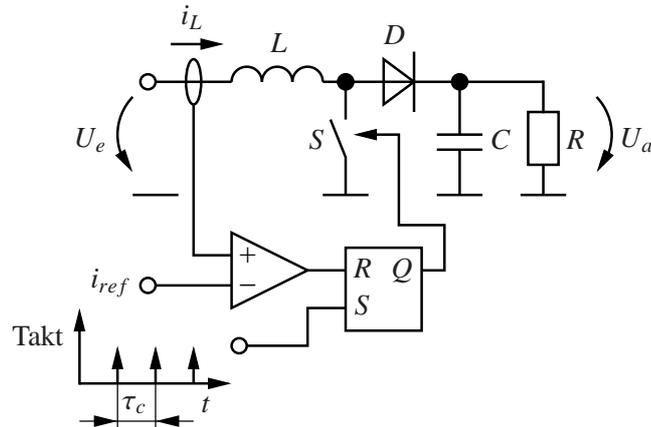


Bild 2.6: Aufwärtswandler im CPM.

$q$	$S$	$D$
1	geschlossen	gesperrt
2	offen	aktiv
3	offen	gesperrt

$e$	Ereignis
0	Einschalttakt aktiviert in $q = 2$
1	$i_L$ erreicht Maximalwert $i_{ref}$
2	$i_L = 0$
3	Einschalttakt aktiviert in $q = 3$

Tabelle 2.1: Diskrete Zustände und Ereignisse des Aufwärtswandlers.

funktion Gl. (2.3) lautet:

$$g(q, e) = \begin{cases} 1 & q = 2 \wedge e = 0 \vee q = 3 \wedge e = 3 \\ 2 & q = 1 \wedge e = 1 \\ 3 & q = 2 \wedge e = 2 \end{cases} .$$

Eine mögliche Beschreibung des Ereignisgenerators ist:

Größe	Gleichung	detektiertes Ereignis
$\phi_0$	$\tau_c - \bar{\tau}(k) - \tau(t)$	Einschalttakt aktiviert in $q = 2$
$\phi_1$	$i_{ref}(t) - i_L(t)$	$i_L$ erreicht Maximalwert $i_{ref}$
$\phi_2$	$i_L(t)$	$i_L = 0$
$\phi_3$	$\tau_c - \bar{\tau}(k-1) - \bar{\tau}(k) - \tau(t)$	Einschalttakt aktiviert in $q = 3$ .

Die Zeitabhängigkeit der Variablen wird im folgenden aus Gründen der Übersichtlich-

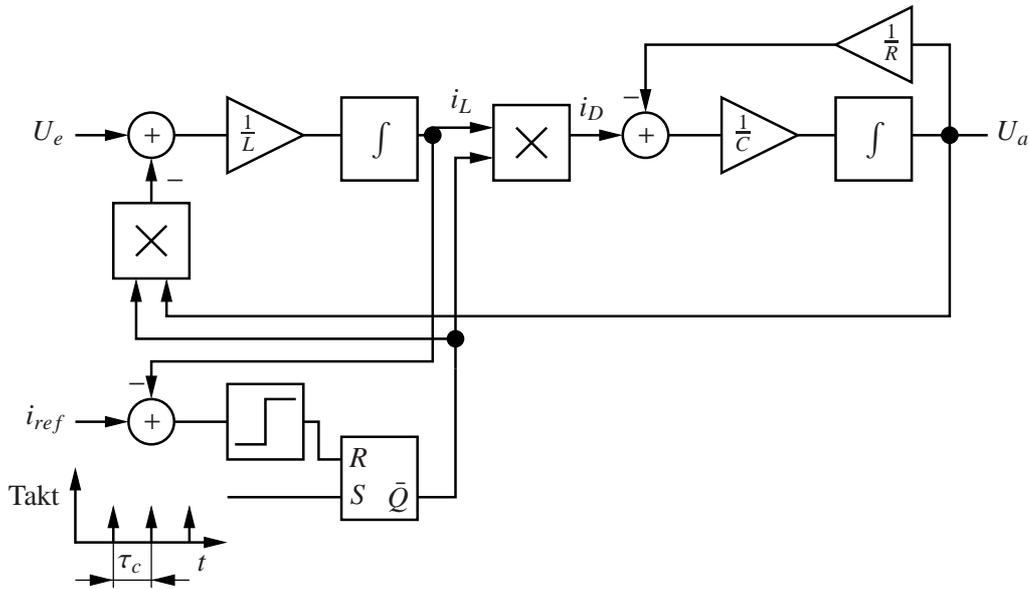


Bild 2.7: Blockschaltbild des Aufwärtswandlers im CPM.

keit weggelassen. Gleichung (2.6) ist dann:

$$\Phi(\mathbf{x}, q, \mathbf{u}, \tau) = \begin{cases} \phi_1 & \text{für } q = 1 \\ \min(\phi_0, \phi_2) & \text{für } q = 2 \\ \phi_3 & \text{für } q = 3 \end{cases} .$$

Der kontinuierliche Zustand enthält Spulenstrom und Ausgangsspannung,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} i_L \\ u_a \end{pmatrix}$ .

Die Zustandsgleichungen des kontinuierlichen Teilsystems Gl. (2.1) lauten

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, q, \mathbf{d}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{U_e}{L} \\ -\frac{u_a}{RC} \end{pmatrix} & \text{für } q = 1 \\ \begin{pmatrix} \frac{U_e - u_a}{L} \\ \frac{i_L}{C} - \frac{u_a}{RC} \end{pmatrix} & \text{für } q = 2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{u_a}{RC} \end{pmatrix} & \text{für } q = 3 \end{cases} , \quad (2.13)$$

wobei die diskreten Zustände und Ereignisse nach Tab. 2.1 vereinbart werden. Ist die Eingangsspannung  $U_e$  veränderlich, so ist  $\mathbf{d} = U_e$ . Der Stelleingang  $\mathbf{u}$  erhält das Signal  $i_{ref}$ .

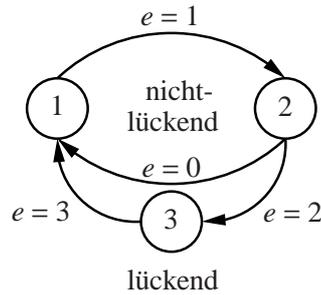


Bild 2.8: Zustandsdiagramm des Aufwärtswandlers im CPM.

Der Wandler hat zwei Betriebsmodi: den nichtlückenden Betrieb und den lückenden Betrieb. Im nichtlückenden Betrieb durchläuft der Wandler nur die Zustandsfolge  $1 \rightarrow 2$ .  $q = 3$ ,  $e = 2$  und  $e = 3$  treten nicht auf. Im lückenden Betrieb erreicht  $i_L$  den Wert 0 vor dem Eintreffen des nächsten Taktes und  $e = 0$  tritt nicht auf. Bild 2.8 zeigt das Zustandsdiagramm im lückenden und nichtlückenden Betrieb.

## 2.2 Gemittelte Modelle

### Prinzip der Bildung gemittelter Modelle

Zunächst wird die Mittelung eines Modells  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  betrachtet. Derartige gemittelte Modelle wurden ursprünglich zur Verhaltensanalyse steifer Differentialgleichungen entwickelt [Hal69]. Ziel ist die Ermittlung einer Differentialgleichung für die Entwicklung des gemittelten Zustandes. Hat die Lösung einer autonomen Differentialgleichung einen schnellen periodischen Anteil  $\Psi$  ohne Gleichanteil und einen langsamen transienten Anteil  $\mathbf{x}_{m,T}$ , so läßt sich der kontinuierliche Zustand durch den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{m,T}(t) + \Psi(t) \quad (2.14)$$

beschreiben, wobei

$$\mathbf{x}_{m,T} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{x}(t') dt' \quad (2.15)$$

der Mittelwertbildung über eine Periode  $T$  des Vektors  $\Psi(t)$ , d.h. einem gleitenden Mittelwert entspricht.

Gemittelte Modelle werden ebenfalls zur Analyse des Einschwingverhaltens von

Oszillatoren genutzt [Phi63]. Dort wird ein multiplikativer Ansatz der Art

$$\mathbf{x}(t) = a_{m,T}(t) \cdot \Psi(t)$$

verwendet, wobei  $a_{m,T}(t)$  die gemittelte Amplitude der Schwingung  $\Psi(t)$  ist. In der Analyse des Einschwingverhaltens wird bei dieser Beschreibung versucht, eine Differentialgleichung für die gemittelte Amplitude zu finden.

In dieser Arbeit werden ausschließlich gemittelte Modelle nach dem Ansatz (2.14) verwendet, deren Eigenschaften im folgenden untersucht werden.

*Eigenschaften und Anwendung*

Für den Anstieg des Signals gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_{m,T}(t)) + \frac{d}{dt}\Psi(t) .$$

Der gemittelte Anstieg beträgt:

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{x}\right)_{m,T} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{d}{dt'}(\mathbf{x}_{m,T}(t')) dt' + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{d}{dt'}\Psi(t') dt' .$$

Wegen

$$\int_t^{t+T} \frac{d}{dt'}\Psi(t') dt' = \int_t^{t+T} d\Psi(t') = \Psi(t+T) - \Psi(t) = 0$$

verschwindet das zweite Integral. Das erste Integral

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{d}{dt'}(\mathbf{x}_{m,T}(t')) dt' = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} d\mathbf{x}(t') = \frac{1}{T} (\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t))$$

ist identisch mit dem Anstieg des Mittelwertes  $\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_{m,T}(t))$ .

Gilt für ein kontinuierliches System die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{2.16}$$

(affines System), so erhält man durch Einsetzen von Gl. (2.14) und Mittelung nach Gl. (2.15):

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,T} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{m,T}(t') + \Psi(t'), t') dt' . \tag{2.17}$$

Für Funktionen der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{c}_2 \tag{2.18}$$

geht Gl. (2.17) direkt über in:

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,T}(t) = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}_{m,T}(t)) . \tag{2.19}$$

Dann beschreibt Gl. (2.19) exakt das gemittelte Verhalten des Systems, d.h. zur Untersuchung des gemittelten Systemverhaltens sind einfach die Systemgrößen durch ihre Mittelwerte unter Beibehaltung der kontinuierlichen Systemdynamik zu ersetzen.

Bei nichtlinearen und/oder zeitabhängigen Funktionen  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  wird Gl. (2.19) dann zur Approximation des gemittelten Systemverhaltens verwendet, wenn alle Komponenten des Vektors  $\Psi(t)$  vernachlässigbar gegenüber den entsprechenden Komponenten des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(t)$  sind. Gleichung (2.19) stellt ebenfalls für den Fall, daß die dominante Zeitkonstante des Systems groß gegenüber  $T$  ist, eine gute Näherung des mittleren Verhaltens dar.

### Anwendung auf zeitgesteuerte hybride Systeme

Die Systembeschreibung nach Gl. (2.19) wurde auch für hybride Systeme der Leistungselektronik verwendet [KSV91] [Eri97] und findet dort unter der Bezeichnung "Averaged Model" verbreiteten Einsatz. Bei diesen Systemen wird zwischen verschiedenen kontinuierlichen Dynamiken umgeschaltet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}, t) .$$

Dabei ist zu beachten, daß Gl. (2.18) dann auch bei affinen Teilsystemen eine Differentialgleichung mit zeitabhängigen Koeffizienten ist:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}_1(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}_2(t) .$$

Dann ergibt das Einsetzen von Gl. (2.14) und Mitteln nach Gl. (2.15) den Ausdruck:

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,T} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{k_m} \int_{t_i}^{t_i+\tau_i} (\mathbf{C}_{1i} \cdot (\mathbf{x}_{m,\tau_m}(t') + \Psi(t')) + \mathbf{c}_{2i}) dt' . \quad (2.20)$$

Für den Spezialfall

$$\sum_{i=1}^{k_m} \mathbf{C}_{1i} \int_{t_i}^{t_i+\tau_i} \Psi(t') dt' = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

kann eine Funktion

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}_{m,\tau_m}(t)) = \frac{1}{T} \left( \sum_{i=1}^{k_m} \mathbf{C}_{1i} \tau_i \right) \cdot \mathbf{x}(t) + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{k_m} \mathbf{c}_{2i} \tau_i \quad (2.22)$$

berechnet werden, die exakt das gemittelte Systemverhalten

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m}(t) = \mathbf{f}''(\mathbf{x}_{m,\tau_m}(t)) \quad (2.23)$$

beschreibt. Ist Gl. (2.21) nicht erfüllt bzw.  $\mathbf{f}$  nichtlinear, so kann auch hier, wenn die Komponenten des Vektors  $\Psi(t)$  vernachlässigbar gegenüber den äquivalenten Komponenten des kontinuierlichen Zustands  $\mathbf{x}(t)$  sind, oder, wenn die dominante Zeitkonstante des Systems groß gegenüber  $\tau_m$  ist, mit der gezeigten Ableitung eine Funktion  $\mathbf{f}''$  ermittelt werden, die das gemittelte Systemverhalten in Näherung modelliert. Das Modell ist kontinuierlich und zeitinvariant und erlaubt den Entwurf des Reglers  $R$  mit Methoden, die für kontinuierliche Systeme entwickelt wurden.

Neben der oben aufgeführten Bedingung müssen folgende weiteren Bedingungen für die Bestimmbarkeit von  $\mathbf{f}''$  bei hybriden Systemen erfüllt sein:

- Die Komponenten des Stellgrößenvektors  $\mathbf{u}(t)$  des Ereignisgenerators müssen in guter Näherung mit denen des gemittelten Stellgrößenvektors  $\mathbf{u}_{m,\tau_m}(t)$  übereinstimmen, d.h. die Stellgröße ist in Näherung konstant über einen Zyklus.  $\mathbf{u}$  wird mit dem Regler  $R$  aus  $\mathbf{x}$  gewonnen. Diese Bedingung sichert, daß durch den Regler keine überlagerte Ereignissteuerung entsteht. Dann kann die Änderung von  $\mathbf{u}$  als Parametervariation des gemittelten Systems betrachtet werden.
- Die Funktion  $\mathbf{x}$  muß eine zeitlich periodische Funktion sein. Dazu darf die Folge der diskreten Zustände nur einen einzigen Zyklus aufweisen, d.h.

$$q(\bar{t}_+) = g'(q(\bar{t}_-)) , \quad (2.24)$$

$g$  ist nur vom aktuellen diskreten Zustand abhängig. Dann vereinfacht sich Gl. (2.7) zu

$$e = i(q) ,$$

d.h. in jedem diskreten Zustand  $q$  existiert genau eine Schaltfläche  $\phi_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau)$ , die einen Zustandsübergang des diskreten Teilsystems verursacht.

### Erweiterung auf ereignisgesteuerte Systeme

Gemittelte Modelle existieren bisher nur für zeitgesteuerte Systeme. Bei der reinen Zeitsteuerung reduziert sich der Ereignisgenerator Gl. (2.6) auf

$$\varphi = \Phi'(\mathbf{u}_{m,\tau_m}(t), t) \quad (2.25)$$

und, wenn sich die Ereignisbedingung  $\Phi'(\mathbf{u}_{m,\tau_m}(\bar{t}), \bar{t}) = 0$  explizit nach  $\bar{t}$  umstellen läßt, so existiert eine Funktion  $\mathbf{f}'''$ , so daß

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}'''(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_{m,\tau_m}(t), t) \quad (2.26)$$

gilt. Diese hat die Form von Gl. (2.16), so daß sich die Mittelwertbildung direkt anwenden läßt. Das Ergebnis sind die gemittelten Modelle der Leistungselektronik [Eri97]

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} = \mathbf{f}''(\mathbf{x}_{m,\tau_m}, \mathbf{u}_{m,\tau_m}), \quad (2.27)$$

die dort zum Entwurf des kontinuierlichen Reglers  $R$  benutzt werden.

### Linearisierung

Das Hinzufügen des äußeren Reglers zum hybriden System führt zu nichtlinearen Ausdrücken, auch wenn die kontinuierlichen Teilsysteme affin sind. Sollen Methoden des affinen Reglerentwurfs verwendet werden, muß das Modell linearisiert werden. Nach Ersetzen der gemittelten Größen durch

$$\mathbf{v}_{m,\tau_m} = \mathbf{V}_A + \tilde{\mathbf{v}}, \quad (2.28)$$

wobei  $\mathbf{V}_A$  die Arbeitspunktgröße und  $\tilde{\mathbf{v}}$  die Abweichung einer beliebigen Variablen vom Arbeitspunkt darstellt, erhält man eine Taylorreihe:

$$\mathbf{f}'_0(\mathbf{V}_A) + f'_1(\mathbf{V}_A, \tilde{\mathbf{v}}) + \mathbf{R}_1(\mathbf{V}_A, \mathbf{v}) = \mathbf{0} .$$

$\mathbf{R}_1(\mathbf{V}_A, \mathbf{v})$  stellt die Restterme dar, die in höherer Ordnung als 1 von  $\mathbf{v}$  abhängen. Bei Vernachlässigung von  $\mathbf{R}_1(\mathbf{V}_A, \mathbf{v})$  erhält man nach Subtraktion des Arbeitspunktes  $\mathbf{f}'_0(\mathbf{V}_A)$  das linearisierte Kleinsignalverhalten. Durch Laplacetransformation  $\mathcal{L}(\mathbf{f}'_1(\mathbf{V}_A(t), \tilde{\mathbf{v}}(t)))$  sind die Übertragungsfunktionen ermittelbar, und typische Reglerentwurfsverfahren für affine Systeme, wie Phasenrandverfahren oder Wurzelortskurvenverfahren, lassen sich anwenden.

### Modellgrenzen

Soll das gemittelte Modell zum Entwurf eines Reglers verwendet werden, ist die Gültigkeit der Näherung des über einen Zyklus konstanten Stellgrößenvektors und von Gl. (2.24)

zu prüfen. Hat  $\mathbf{u}$  eine nicht mehr vernachlässigbare Welligkeit, so hat dies eine Veränderung der Ereignisgeneration zur Folge, d.h. die Welligkeit von  $\mathbf{u}$  verursacht eine überlagerte Ereignissteuerung. Wie das nachfolgende Beispiel zeigt, nimmt dann der Modellfehler mit wachsender Welligkeit zu.

Dieser Effekt kann durch eine Erweiterung der gemittelten Modelle verringert werden. [LB96b][LB96a] und [CVS99] geben mögliche Modellerweiterungen zur Berücksichtigung periodischer Zeitverläufe von  $\mathbf{u}$  an. Im Abschnitt 2.3 werden die erweiterten gemittelten Modelle behandelt.

**Beispiel**

Ein Aufwärtswandler mit PWM (Bild 2.9) wird im CCM mit dem gemittelten Modell modelliert. Die Zyklusdauer ist konstant  $\tau_m = \tau_c$ . Die Kapazität  $C$  sorgt für eine ge-

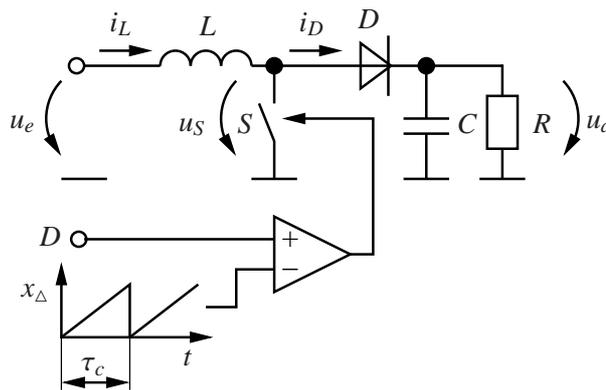


Bild 2.9: Aufwärtswandler mit PWM.

genüber dem Mittelwert vernachlässigbare Welligkeit von  $u_a$ . Damit kann  $u_a$  in Näherung als konstant über einen Zyklus betrachtet werden und  $i_L$  ist stückweise zeitlich linear. Das Stellsignal  $d$  ist zunächst konstant. Der Schalter und die Diode seien ideal. Die mittlere Spannung über dem Schalter beträgt

$$u_{S m, \tau_c} = (1 - D)(u_{am, \tau_c}), \tag{2.29}$$

wobei  $D = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}$  das Tastverhältnis ist.  $\tau_1$  ist die Einschaltdauer und  $\tau_2$  die Ausschaltdauer des Schalters.

Der mittlere Diodenstrom hat den Wert:

$$i_{Dm,\tau_c} = (1 - D)i_{Lm,\tau_c} \quad (2.30)$$

Das gemittelte Modell des Wandlers ist

$$\begin{aligned} \frac{di_{Lm,\tau_m}}{dt} &= \frac{1}{L}(u_{em,\tau_m} - D'u_{am,\tau_m}) \\ \frac{du_{am,\tau_m}}{dt} &= \frac{1}{C}\left(D'i_{Lm,\tau_m} - \frac{u_{am,\tau_m}}{RC}\right) \end{aligned}$$

mit  $D' = 1 - D$ . Bild 2.10 zeigt das Blockschaltbild des gemittelten Systems. Einsetzen

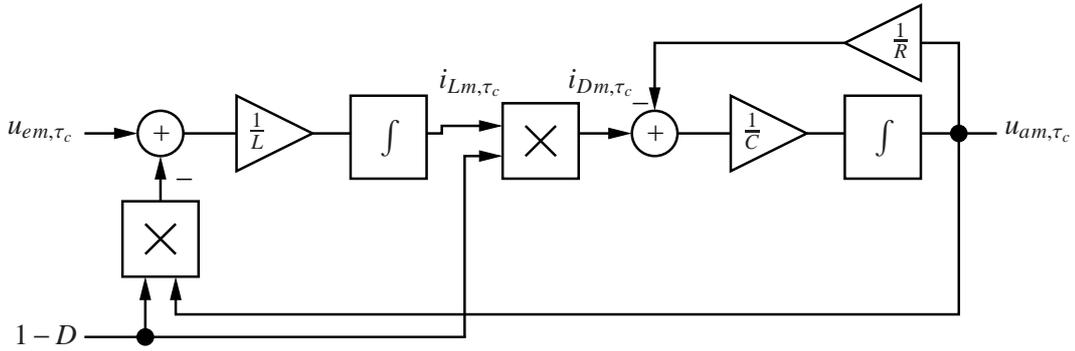


Bild 2.10: Gemitteltes Modell des Aufwärtswandlers mit PWM.

von Gl. (2.28) mit der Besonderheit  $D' = D'_A - \tilde{d}$  und Umsortieren liefert:

$$0 = D'_A U_{aA} - U_{eA} \quad (2.31)$$

$$-\tilde{u}_e + D'_A \tilde{u}_a - \tilde{d} U_{aA} + LC \frac{\ddot{u}_a}{D'_A} + \frac{L}{R} \frac{\dot{u}_a}{D'_A} + \frac{L}{R} \frac{\dot{d} U_{aA}}{D'^2_A} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} -\tilde{d} \ddot{u}_a + LC \frac{\ddot{u}_a}{(D'_A - \tilde{d})(D'_A)} + LC \frac{\dot{d} \dot{u}_a}{(D'_A - \tilde{d})^2} + \frac{L}{R} \frac{\dot{d} \dot{u}_a}{(D'_A - \tilde{d})^2} \\ + \frac{L}{R} \frac{\dot{d} \dot{u}_a}{(D'_A - \tilde{d}) D'_A} + \frac{L}{R} \frac{\dot{d} U_{aA} (\tilde{d}^2 - 4\tilde{d} + 2\tilde{d} D'_A)}{D'^2_A (D'_A - \tilde{d})^2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Darin stellt Teil (2.31) den Arbeitspunkt, Teil (2.32) das lineare Kleinsignalverhalten und Teil (2.33) die nichtlineare Abweichung  $R_1$  dar.

### Linearisierung

Durch Vernachlässigung der nichtlinearen Abweichung (2.33) und Elimination des Arbeitspunktes (2.31) erhält man das linearisierte Kleinsignalverhalten des Systems:

$$0 = -\tilde{d} \ddot{u}_a + LC \frac{\ddot{u}_a}{(D'_A - \tilde{d}) D'_A} + LC \frac{\dot{d} \dot{u}_a}{(D'_A - \tilde{d})^2} + \frac{L}{R} \frac{\dot{d} \dot{u}_a}{(D'_A - \tilde{d})^2} \quad (2.34)$$

Durch Laplacetransformation läßt sich das Streckenmodell im Bildbereich

$$\underline{U}_a(s) = \underline{U}_e(s) \frac{1}{D'_A - \frac{s^2 LC}{D'_A} + \frac{sL}{RD'_A}} + \underline{D}(s) \frac{U_{aA} \left(1 - \frac{sL}{RD'_A}\right)}{D'_A - \frac{s^2 LC}{D'_A} + \frac{sL}{RD'_A}}$$

gewinnen, das zum Reglerentwurf verwendet werden kann.

**Modellgrenzen**

Der Regler  $R$  wird angeschlossen. Er realisiert eine proportionale Zustandsrückführung  $D = D_{ref} + k_i i_L + k_u u_a$ , Bild 2.11. Abhängig von der Reglerparametrierung und der Schaltfrequenz ist die Welligkeit von  $\mathbf{u}$  entweder vernachlässigbar oder muß berücksichtigt werden. Die Parametrierung ist in Tab. 2.2 zusammengefaßt [LB96b]. Die Pa-

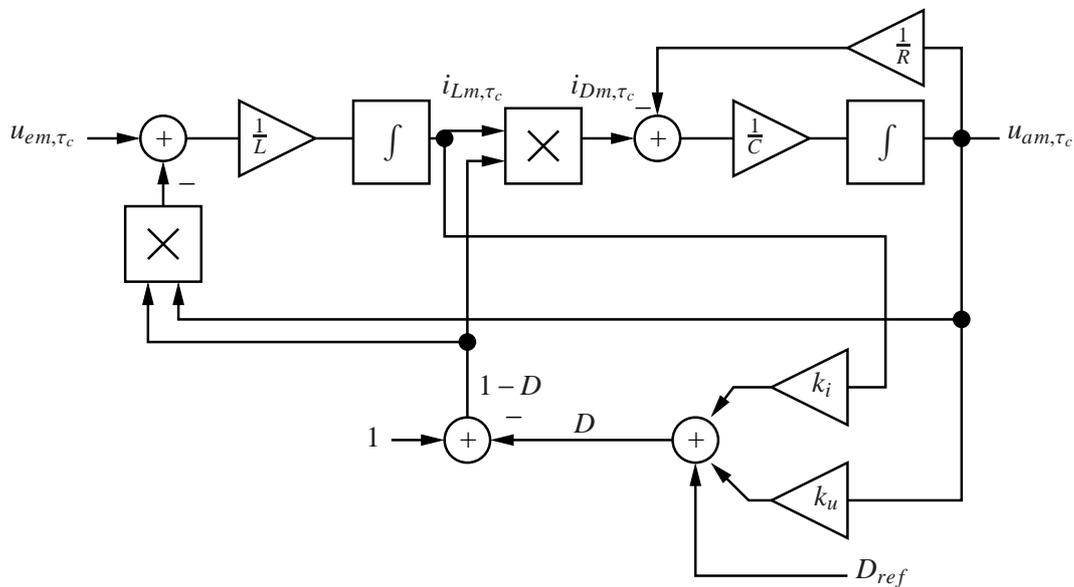


Bild 2.11: Gemittelttes Modell des Aufwärtswandlers mit PWM und Zustandsrückführung.

$U_e/\text{V}$	$L/\mu\text{H}$	$C/\mu\text{F}$	$R/\Omega$	$ref$	$k_i/\text{A}^{-1}$	$k_u/\text{V}^{-1}$
5	50	4.4	28	0.13	-0.174	0.0435

Tabelle 2.2: Parametersatz des Aufwärtswandlers.

parameter sind so gewählt, daß die Welligkeit nicht von vornherein vernachlässigt werden kann.

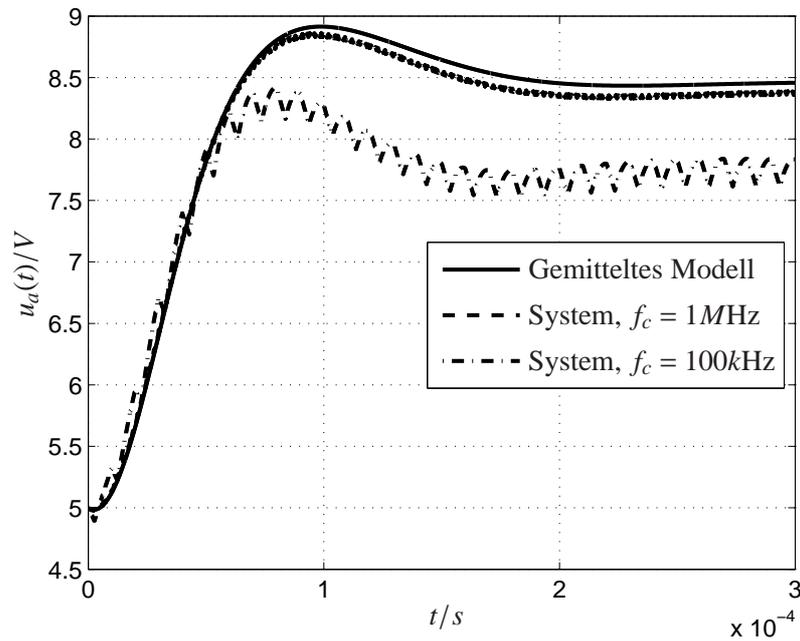


Bild 2.12: Transientverhalten gemitteltetes Modell und geschaltetes Systemmodell.

Bild 2.12 stellt die Sprungantworten des gemittelten Modells und des Systems bei Zyklusdauern von  $\tau_c = 1\mu\text{s}$  und  $\tau_c = 10\mu\text{s}$  dar. Deutlich ist eine Abweichung der Sprungantworten beider Modelle zu erkennen, die mit zunehmender Zyklusdauer zunimmt. Ursache für die Abweichung ist die mit zunehmender Zyklusdauer zunehmende Welligkeit der kontinuierlichen Signale. Abschnitt 2.3 behandelt Erweiterungen, die diese Abweichung verringern.

### Modellierung von Pulsfrequenzmodulation

In der bisherigen gemittelten Modellierung wurde stets von einer konstanten Zyklusdauer ausgegangen. An dieser Stelle wird untersucht, inwieweit sich gemittelte Modelle auf Systeme mit variabler Zyklusdauer anwenden lassen.

Können die Zeitverläufe mit stückweise zeitlich linearen Funktionen modelliert werden, dann hat  $\mathbf{f}$  die Form:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t') = \begin{cases} \mathbf{c}_1 & \text{für } t' \leq \tau_1 \\ \mathbf{c}_2 & \text{für } \tau_1 \leq t' \leq \tau_m \end{cases} .$$

Die Differentialgleichung zur Beschreibung des gemittelten Systemverhaltens ist dann:

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} = \frac{\mathbf{c}_1 \tau_1 + \mathbf{c}_2(\tau_m - \tau_1)}{\tau_m}. \quad (2.35)$$

Gleichung (2.35) enthält keine Abhängigkeit von  $\mathbf{x}$  mehr. Da die Zyklusdauer die Summe aller Aktivierungsdauern innerhalb eines Zyklusses ist, läßt sich Gl. (2.35) für ein zeitgesteuertes System mit nicht konstanter Zyklusdauer schreiben als

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{c}_i \tau_i}{\sum_{i=1}^N \tau_i}, \quad (2.36)$$

wobei  $i \in [1, N]$  die innerhalb des Zyklusses aktivierten Betriebsmodi sind. Da die Aktivierungsdauern bei Zeitsteuerung entweder konstant sind oder explizit von der Stellgröße abhängen, kann das gemittelte Modell nach Gl. (2.36) auch bei nicht konstanter Zyklusdauer verwendet werden.

## 2.3 Erweiterte gemittelte Modelle

### Modell

Erweiterte gemittelte Modelle berücksichtigen die Rückwirkung der Welligkeitsfunktion auf die Ereigniszeiten. Dadurch können mit diesen Modellen auch ereignisgesteuerte Systeme modelliert werden. Die prinzipielle Vorgehensweise besteht darin, aus dem ereignisgesteuerten System ein äquivalentes zeitgesteuertes Modell zu gewinnen. Kann dieses nicht gefunden werden, so existiert auch kein erweitertes gemitteltes Modell.

Zur Beschreibung der Welligkeitsfunktionen existieren zwei Ansätze:

1. Beschreibung mit Zeitfunktion
2. Beschreibung mit Fourierreihe

### Beschreibung mit Zeitfunktion

In [LB96b] wird zunächst der kontinuierliche Zustand durch den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{m,\tau_m}(t) + \Psi(\mathbf{x}_{m,\tau_m}(t), t) \quad (2.37)$$

modelliert, wobei  $\Psi$  eine periodische Funktion in  $t$  ist, die die Welligkeit von  $\mathbf{x}$  erfaßt.

Die gemittelte Modellierung soll mit einer gemittelten zeitinvarianten Funktion

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} = \mathfrak{g}(\mathbf{x}_{m,\tau_m}) = \frac{1}{\tau_m} \int_t^{t+\tau_m} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_{m,\tau_m} + \Psi(\mathbf{x}_{m,\tau_m}, t'), t') dt' \quad (2.38)$$

erfolgen, die gesucht ist.

In Gl. (2.38) wird die Ereignissteuerung dadurch berücksichtigt, daß  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  in [LB96b] für den dort behandelten Spezialfall in der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{k_m} \mathbf{f}(\mathbf{x}, i) \cdot \epsilon(u(\mathbf{x}) - r(t \bmod T))$$

angegeben wird. Dabei ist

$$\epsilon(v) = \begin{cases} 1 & \text{für } v \geq 0 \\ 0 & \text{für } v < 0 \end{cases}$$

die Einheitssprungfunktion und

$$r(v) = \begin{cases} v & \text{für } v \geq 0 \\ 0 & \text{für } v < 0 \end{cases}$$

die Rampenfunktion. [LB96b] behandelt nur pulsweitengesteuerte Systeme. Die überlagerte Ereignissteuerung ist durch  $u(\mathbf{x}) - r(t \bmod T)$  modelliert. Dabei ist  $u(\mathbf{x})$  das vom kontinuierlichen Zustand abhängige Ausgangssignal eines Proportionalreglers.

Ableiten von (2.37) und Umstellen nach  $\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m}$  führt auf:

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} = \frac{\dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial \Psi}{\partial t}}{\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_{m,\tau_m}}} \quad (2.39)$$

Dabei ist  $\mathbf{e}_1$  ein Vektor der Dimension von  $\Psi$ , dessen Elemente den Wert Eins haben. Die verwendete Operation  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_{m,\tau_m}}$  ist die Ableitung jedes einzelnen Elements des Vektors  $\Psi$  nach dem äquivalenten Element des gemittelten kontinuierlichen Zustands  $\mathbf{x}_{m,\tau_m}$ . Um Gl. (2.38) zu erhalten ist noch  $\dot{\mathbf{x}}$  durch  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{m,\tau_m} + \Psi)$  zu ersetzen. Zusätzlich führt [LB96b] die Näherung

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_{m,\tau_m}} \right| \ll 1$$

ein. Diese Näherung bedeutet, daß die Welligkeit nur geringfügig vom gemittelten kontinuierlichen Zustand abhängt. Dann vereinfacht sich Gl. (2.39) zu:

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{m,\tau_m} + \Psi, t) - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.40)$$

Die Welligkeitsfunktion kann dann durch

$$\Psi(\mathbf{x}_{m,\tau_m}, t) = \int_t^{t+\tau_m} [\mathbf{f}(\mathbf{x}_{m,\tau_m} + \Psi(\mathbf{x}_{m,\tau_m}, t'), t') - \mathbf{g}(\mathbf{x}_{m,\tau_m})] dt' + h(\mathbf{x}_{m,\tau_m}) \quad (2.41)$$

berechnet werden, wobei  $h(\mathbf{x}_{m,\tau_m})$  eine Vektorfunktion ist, die

$$\int_t^{t+\tau_m} \Psi(\mathbf{x}_{m,\tau_m}, t') dt' = \mathbf{0}$$

sichert.

Um das erweiterte gemittelte Modell zu erhalten, ist die nichtlineare Integralgleichung (2.41) zu lösen, in der auch  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_{m,\tau_m})$  nach Gl. (2.38) vorkommt.

Mit dieser Methode sind die Funktionen  $\mathbf{g}$  und  $\Psi$  nur für Spezialfälle bestimmbar. Ist ein äußerer Regler vorhanden, an dessen Ausgang die Welligkeit von  $\mathbf{u}$  nicht vernachlässigt werden kann, so muß die Generierung von  $\mathbf{u}$  vor der Ableitung des Modells berücksichtigt werden, da wegen  $\Psi_{\mathbf{x}} = \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}, t)$  durch die Welligkeit  $\Psi_{\mathbf{u}}$  eine Abhängigkeit  $\Psi_{\mathbf{x}}(\Psi_{\mathbf{u}}, t)$  entsteht. Analytische Ausdrücke können bei einfachen Welligkeitsfunktionen für den stationären Zustand  $\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m}$  abgeleitet werden. Das dynamische Verhalten ist mit diesem Modell nur durch Simulation ermittelbar, da wegen der Welligkeitsfunktion  $\Psi(t)$  das Modell zeitvariant ist. [LB96b] führt die Modellierung und Analyse für das Beispiel aus Abschnitt 2.2 durch. Die dort gezeigten Simulationsergebnisse bei Verwendung des erweiterten Modells stimmen deutlich besser mit dem Systemverhalten überein als die Modellierung mit dem einfachen gemittelten Modell. Das erweiterte Modell kann zur Beschleunigung der Simulation gegenüber dem allgemeinen Modell bei vertretbarer Genauigkeit genutzt werden.

Eine praktikablere Methode zur Bestimmung der Welligkeitsfunktionen wird in [Hel04] verwendet. Das Modell ist identisch mit [LB96b]:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{m,\tau_m}(t) \\ \mathbf{x}_{m,\tau_m}(t) &= \frac{1}{\tau_m} \int_t^{t+\tau_m} \mathbf{x}(t') dt' . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Sind alle Elemente des Vektors  $\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} \cdot \tau_m$  vernachlässigbar gegenüber den äquivalenten Elementen des Vektors  $\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m}$ , so gilt in Näherung

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} \approx \frac{1}{\tau_m} (\mathbf{x}(t + \tau_m) - \mathbf{x}(t))$$

und innerhalb eines Zyklusses:

$$\mathbf{x}_{m,\tau_m}(\tau) = \mathbf{x}_0 + \int_0^\tau \dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} dt' = \mathbf{x}_0 + \dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} \cdot \tau. \quad (2.43)$$

Die Welligkeitsfunktion  $\Psi$  soll eine mittelwertfreie Funktion sein, damit die gemittelte Größe mit dem Mittelwert von  $\mathbf{x}$  übereinstimmt:

$$\int_t^{t+\tau_m} \Psi(\mathbf{x}_{m,\tau_m}(t')) dt' = \int_t^{t+\tau_m} \mathbf{x}(t') - \mathbf{x}_{m,\tau_m}(t') dt' = \mathbf{0}. \quad (2.44)$$

Aus Gl. (2.44) ist der Anfangswert  $\mathbf{x}_{m,\tau_m}(0)$  für Gl. (2.43) bestimmbar. Mit Gl. (2.42) kann schließlich  $\Psi(\mathbf{x}_{m,\tau_m}, t)$  bestimmt werden.

Bei der Berechnung von  $\Psi(\mathbf{x}_{m,\tau_m}, t)$  kann für viele hybride Systeme die Bedingung erfüllt sein, daß die Elemente des Vektors  $\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} \cdot \tau$  vernachlässigbar gegenüber den äquivalenten Elementen des Vektors  $\mathbf{x}_{m,\tau_m}$  sind, so daß die Welligkeitsfunktion durch eine stückweise zeitlich lineare Funktion approximiert werden kann.

Bei dieser Variante wird stets das Signal  $\mathbf{x}_{m,\tau_m}(t) + \Psi(\mathbf{x}_{m,\tau_m}(t), t)$  benutzt, um die durch die Welligkeit modifizierten Ereigniszeiten und daraus den genaueren Mittelwert  $\mathbf{x}_{m,\tau_m}$  zu bestimmen. Die Beschreibung ist auch hier eine gemischte ereignisgesteuerte/zeitgesteuerte Form der Modellierung, die wegen der Zeitvarianz durch  $\Psi(t)$  analytische Ausdrücke nur für den stationären Zustand erlaubt.

Die vorgestellte Methode beschränkt sich auf pulsweitenmodulierte Systeme, bei denen durch die Welligkeit des kontinuierlichen Zustands eine Pulsweitenmodulation verursacht wird. Durch folgende Vorgehensweise kann ein erweitertes gemitteltes Modell für hybride Systeme auch mit anderem Ereignisgenerator gefunden werden:

- 1) Mit der Definition der Welligkeitsfunktion, Gl. (2.14) sind die Abschnitte der Welligkeitsfunktion für die einzelnen diskreten Zustände berechenbar durch:

$$\Psi_i(\mathbf{x}_{m,\tau_m}, \tau) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{0,i}, \tau) - \mathbf{x}_{m,\tau_m} - \dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} \cdot \left( \tau + \sum_{l=1}^{i-1} \bar{\tau}_l \right). \quad (2.45)$$

Dabei ist  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{0,i}, \tau)$  die Lösung von Gl. (2.1), die in verschiedene Stücke (siehe Bild 2.2) zerlegt werden kann. In Gl. (2.45) sind  $\Psi_i(\mathbf{x}_{m,\tau_m}, \tau)$ ,  $\mathbf{x}_{0,i}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m}$  und  $\bar{\tau}_l$  unbekannt. Die Nebenbedingung ist die Mittelwertfreiheit der Welligkeitsfunktion:

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k_m} \int_0^{\bar{\tau}_i} \Psi_i(\mathbf{x}_{m,\tau_m}, \tau) d\tau = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{0,k_m}, \bar{\tau}_{k_m}) - \mathbf{x}_{0,1} - \dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} \tau_m. \quad (2.46)$$

2) Die Anwendung der Ereignisbedingung Gl. (2.6) liefert:

$$0 = \Phi_i \left( \mathbf{x}_{m,\tau_m} + \dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} \cdot \sum_{l=1}^i \bar{\tau}_l + \Psi_i(\mathbf{x}_{m,\tau_m}, \bar{\tau}_i), \mathbf{u}_{m,\tau_m}, \bar{\tau}_i \right). \quad (2.47)$$

Wäre der Anteil  $\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} \cdot \sum_{l=1}^i \bar{\tau}_l$  für alle  $i \leq k_m$  gegenüber  $\Psi$  vernachlässigbar, so würden Gl. (2.45)–Gl. (2.47) ein äquivalentes zeitgesteuertes System ergeben, aus dem sich mit Gl. (2.17) ein gemittelttes Modell berechnen läßt. Allgemein kann dies jedoch nicht vorausgesetzt werden, so daß die Anwendung der Mittelung auf

3)

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} = \sum_{i=1}^{k_m} \frac{1}{\bar{\tau}_i} \left( \hat{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_{0,i}, \bar{\tau}_i) - \mathbf{x}_{0,i} \right) = \frac{1}{\tau_m} \left( \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{0,k_m}) - \mathbf{x}_{0,1} \right) \quad (2.48)$$

führt.

Gleichung (2.45)–Gl. (2.48) bilden ein System von impliziten Gleichungen. In Gl. (2.48) ist  $\mathbf{x}_{0,i}$  der Anfangswert des kontinuierlichen Zustands für  $q = i$ . Gelingt es, aus diesen Gleichungen eine explizite Gleichung  $\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} = \mathbf{f}''(\mathbf{x}_{m,\tau_m}, \mathbf{u}_{m,\tau_m})$  zu gewinnen, so ist diese das gemittelte Modell für das ereignisgesteuerte oder gemischt zeit-ereignisgesteuerte System.

Die Aktivierungsdauern  $\bar{\tau}_i$  und somit auch die Zyklusdauer  $\tau_m$  sind abhängig von  $\mathbf{x}_{m,\tau_m}$  und  $\mathbf{u}_{m,\tau_m}$ . Somit ist das hier dargestellte Verfahren auch dann anwendbar, wenn  $\tau_m$  eine von  $\mathbf{x}_{m,\tau_m}$  und  $\mathbf{u}_{m,\tau_m}$  abhängige Funktion ist. Die vom Ansatz, Gl. (2.14) stammende Einschränkung auf konstante Zyklusdauer ist nicht erforderlich und das Modell kann auch für variable Zyklusdauern verwendet werden.

### Beschreibung mit Fourierreihe

Das Zustandssignal  $\mathbf{x}(t)$  wird durch die Fourierreihe

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{m,\tau_m}(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{a}_{\mathbf{x},l}(t) \cos(l\omega_s t) + \mathbf{b}_{\mathbf{x},l}(t) \sin(l\omega_s t) \quad (2.49)$$

[CVS99] beschrieben. In Gl. (2.49) ist  $\mathbf{x}_{m,\tau_m}(t)$  der gemittelte Wert.  $\mathbf{a}_{\mathbf{x},l}(t)$  und  $\mathbf{b}_{\mathbf{x},l}(t)$  sind die Fourierkoeffizienten der Welligkeitsfunktion. Da  $\mathbf{x}_{m,\tau_m}(t)$  zeitvariant ist, sind  $\mathbf{a}_{\mathbf{x},l}(t)$  und  $\mathbf{b}_{\mathbf{x},l}(t)$  ebenfalls zeitvariant. Da sich in vielen Systemen der Mittelwert über

einen Zyklus nur unwesentlich verändert, können die Fourierkoeffizienten über einen Zyklus als konstant approximiert werden. Bei Weglassen der Harmonischen bleibt nur noch  $\mathbf{x}_{m,\tau_m}(t)$  übrig und man erhält das einfache gemittelte Modell. Einsetzen von (2.49) in  $\mathbf{f}$  und anschließende Mittelung führt auf:

$$\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m}(t) = \frac{1}{\tau_m} \int_t^{t+\tau_m} \left[ \mathbf{f} \left( \mathbf{x}_{m,\tau_m}(t') + \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{a}_{\mathbf{x},l}(t') \cos(l\omega_s t') + \mathbf{b}_{\mathbf{x},l}(t') \sin(l\omega_s t') \right) \right] dt' . \quad (2.50)$$

Bedingt durch Nichtlinearitäten in  $\mathbf{f}_{m,\tau_m}$  oder durch die Rückführung von  $\mathbf{u}$  führen die Harmonischen zu einer Veränderung von  $\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m}$ .

Enthält  $\mathbf{f}$  z.B. eine Multiplikation zweier Signale  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ , so ist die Änderung der mittleren Ableitung des betreffenden Zustands gegenüber dem Standardmodell:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} (a_{x_1,l} a_{x_2,l} + b_{x_1,l} b_{x_2,l}) .$$

Aus dieser Wirkung wird sofort die Abhängigkeit des Fehlers in Bild 2.12 klar: ist die Welligkeit gering, sind auch die Koeffizienten  $\mathbf{a}_{\mathbf{x},l}(t)$  und  $\mathbf{b}_{\mathbf{x},l}(t)$  gering. Damit wird  $\dot{\mathbf{x}}_{m,\tau_m}$  bei geringer Welligkeit weniger durch die Harmonischen beeinflusst als bei hoher Welligkeit.

Die formale Anwendung des Verfahrens liefert ein gemitteltes Modell, das neben dem gemittelten kontinuierlichen Zustand Produkte der Form  $\mathbf{a}_{\mathbf{x}_1,l} \mathbf{a}_{\mathbf{x}_2,l}$  enthält. Die Fourierreihe kann nur bis zu einer endlichen Ordnung gebildet werden. Diese richtet sich nach dem Rechenaufwand. Sind  $\mathbf{a}_{\mathbf{x},l}$  und  $\mathbf{b}_{\mathbf{x},l}$  näherungsweise unabhängig von  $\mathbf{x}_{m,\tau_m}$ , so ist das erhaltene Modell zeitinvariant wie das Standardmodell. Existiert jedoch ein Regler  $R$ , so bewirkt die Änderung der Stellgröße  $\mathbf{u}$  eine Veränderung von  $\mathbf{a}_{\mathbf{x},l}(t)$  und  $\mathbf{b}_{\mathbf{x},l}(t)$ . Zur Berechnung muß die Nebenbedingung

$$\mathbf{0} = \phi \left( \mathbf{x}_{m,\tau_m}(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{a}_{\mathbf{x},l}(t) \cos(l\omega_s t) + \mathbf{b}_{\mathbf{x},l}(t) \sin(l\omega_s t), \right. \\ \left. \mathbf{u}_{m,\tau_m}(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{a}_{\mathbf{u},l}(t) \cos(l\omega_s t) + \mathbf{b}_{\mathbf{u},l}(t) \sin(l\omega_s t), t \right)$$

(Ereignisgeneration) herangezogen werden. Ist diese erfüllt, so tritt ein Umschalteereignis ein. Durch Umstellen der Ereignisbedingung nach  $t$  werden die Ereigniszeitpunkte ermittelt.

Dabei hängen die Koeffizienten des Reglerausgangssignals von denen des kontinuierlichen Zustands ab. In der Regel führt dies zu iterativen Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten, da die Koeffizienten von den Ereigniszeitpunkten abhängen. Die Fourierreihe bildet Instetigkeiten in der Ableitung eines Signals und das Signal im Bereich der Instetigkeit nur mit schlechter Konvergenz nach. Zur Berücksichtigung der o.g. Nebenbedingung wird jedoch der Wert an der Stelle der Instetigkeit (Umschaltbedingung) benötigt. Daher muß die Abbruchordnung relativ hoch gewählt werden, was einen hohen Rechenaufwand bedeutet.

## Beispiel

### Beschreibung mit Zeitfunktion

Der Wandler aus Abschnitt 2.2 mit der Parametrierung in Tab. 2.2 wird modelliert mit der Methode nach [Hel04]. In Näherung gilt  $\Psi_{i_L} \ll i_{Lm,\tau_m}$  und  $\Psi_{u_a} \ll u_{am,\tau_m}$ . Dann sind  $i_L$  und  $u_a$  in Näherung zeitlich stückweise affin

$$\begin{aligned} i_L(\tau) &= \begin{cases} i_{L0} + c_1\tau & 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ i_{L0} + c_1\tau_1 + c_2(\tau - \tau_1) & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_1 + \tau_2 \end{cases} \\ u_a(\tau) &= \begin{cases} u_{a0}\left(1 - \frac{\tau}{RC}\right) & 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ u_{a0}\left(1 - \frac{\tau_1}{RC}\right)\left(1 - \frac{\tau - \tau_1}{RC}\right) + \frac{i_{Lm,\tau_2}}{C}(\tau - \tau_1) & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_1 + \tau_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.51)$$

mit  $c_1 = \frac{U_e}{L}$ ,  $c_2 = \frac{U_e - u_{am,\tau_m}}{L}$  und  $i_{Lm,\tau_2} = i_{L0} + c_1\tau_1 + \frac{c_2\tau_2}{2}$ . Unter Vernachlässigung von  $\dot{x}_{m,\tau_m}$  gegenüber  $\dot{x}$  führt (2.42) sofort auf die Welligkeitsfunktionen:

$$\begin{aligned} \Psi_{i_L} &= \begin{cases} c_1\tau - \frac{1}{2}c_1\tau_1 & 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ c_2\left(\tau - \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_m)\right) & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_m \end{cases} \quad (2.52) \\ \Psi_{u_a} &= \begin{cases} \frac{u_{am,\tau_m}}{RC - \frac{\tau_1}{2}}\left(\frac{\tau_1}{2} - \tau\right) & 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ \left(\tau - \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_m)\right)\left(\frac{i_{Lm,\tau_m}}{C} - \frac{u_{am,\tau_m}}{RC - \frac{\tau_1}{2}}\left(1 - \frac{\tau_1}{RC}\right)\right) & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_m \end{cases} \quad (2.53) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der korrekten Ereigniszeiten bei Regelung wird die Welligkeitsfunktion zu den Ereigniszeiten benötigt:

$$\begin{aligned} \Psi_{i_L}(\tau_1) &= \frac{c_1\tau_1}{2} \\ \Psi_{u_a}(\tau_1) &= -\frac{\tau_1 u_{am,\tau_m}}{2RC - \tau_1} \end{aligned}$$

Werden Reglerstruktur und Ereignisgenerator nach Abschnitt 2.2 verwendet, so ergibt sich die Einschaltzeit mit Hilfe von

$$x_{\Delta,\min} + \tau_1 \frac{2\hat{x}_{\Delta}}{\tau_m} = k_i (i_{Lm,\tau_m} + \Psi_{i_L}(\tau_1)) + k_u (u_{am,\tau_m} + \Psi_{u_a}(\tau_1)) + ref$$

zu

$$\tau_1 = a - \sqrt{a^2 - b} \quad (2.54)$$

mit:

$$a = -\frac{x_{\Delta,\min} - 4RC \frac{\hat{x}_{\Delta}}{\tau_m} - k_i i_{Lm,\tau_m} + RC k_i c_1 - 2k_u u_{am,\tau_m} - ref}{\frac{4\hat{x}_{\Delta}}{\tau_m} - k_i c_1}$$

$$b = \frac{-2RC x_{\Delta,\min} + 2RC k_i i_{Lm,\tau_m} + 2RC k_u u_{am,\tau_m} + 2RC ref}{\frac{2\hat{x}_{\Delta}}{\tau_m} - k_i \frac{c_1}{2}} \quad (2.55)$$

Die Systemanalyse erfolgt nun mit der korrigierten Einschaltzeit  $\tau_1$ . Bild 2.13 stellt die Transienten des Mittelwerts des erweiterten gemittelten Modells im Vergleich zu denen des geschalteten Systemmodells und des einfachen gemittelten Modells bei  $f_m = 100 \text{ kHz}$  dar. Unter der Bezeichnung Originalsystem ist stets das geschaltete Systemmodell zu verstehen. Die Verbesserung der Abschätzung des Mittelwerts durch Berücksichtigung der Welligkeit ist deutlich erkennbar.

Mit dieser Methode lässt sich zum einen der Simulationsaufwand gegenüber dem Originalsystem bei vertretbarer Genauigkeit deutlich verringern, zum anderen erhält man analytische Ausdrücke für den periodischen Grenzyklus des Systems und für die Kleinsignalparameter.

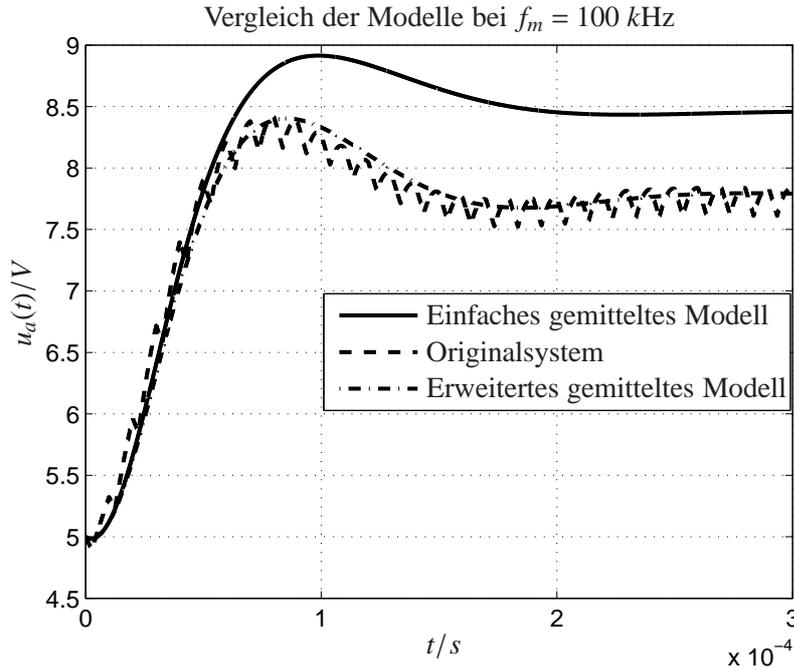


Bild 2.13: Transientverhalten erweitertes gemittelttes Modell und geschaltetes Systemmodell.

### Beschreibung mit Fourierreihe

Ausgangspunkt für die Fourierreihenbeschreibung sind die Strom- und Spannungsverläufe nach Gl. (2.51). Die Koeffizienten der entsprechenden Fourierreihe betragen

$$\begin{aligned}
 a_{0i_L} &= i_{L,0} + \frac{c_1 \tau_1 (\tau_1 + 2\tau_2) + c_2 \tau_2^2}{2\tau_m} \\
 a_{ki_L} &= \frac{\tau_m}{2(\pi k)^2} (c_2 - c_1) \left( 1 - \cos \frac{2\pi k \tau_1}{\tau_m} \right) \\
 b_{ki_L} &= \frac{\tau_m (c_1 - c_2)}{2(\pi k)^2} \sin \frac{2\pi k \tau_1}{\tau_m} - \frac{\tau_1 (c_1 - c_2) + c_2 \tau_m}{\pi k} \\
 a_{0u_a} &= u_{a,0} \left( 1 - \frac{\tau_m}{2RC} + \frac{\tau_1 \tau_2^2}{2\tau_m (RC)^2} \right) + \frac{\tau_2^2 i_{Lm, \tau_2}}{2C\tau_m} \\
 a_{ki_{u_a}} &= \frac{\tau_m}{2(\pi k)^2} (c_{2,u} - c_{1,u}) \left( 1 - \cos \frac{2\pi k \tau_1}{\tau_m} \right) \\
 b_{ki_{u_a}} &= \frac{\tau_m (c_{1,u} - c_{2,u})}{2(\pi k)^2} \sin \frac{2\pi k \tau_1}{\tau_m} - \frac{\tau_1 (c_{1,u} - c_{2,u}) + c_{2,u} \tau_m}{\pi k}
 \end{aligned}$$

mit:

$$c_{1,u} = -\frac{u_{am,\tau_m}}{RC\left(1 - \frac{\tau_1}{2RC}\right)}$$

$$c_{2,u} = \frac{i_{Lm,\tau_m}}{C} - \frac{u_{am,\tau_m}}{RC} \frac{1 - \frac{\tau_1}{RC}}{1 - \frac{\tau_1}{2RC}}.$$

Nach Ersetzen von  $u_a$  und  $i_L$  durch die Fourierreihen bestimmt sich die Einschaltzeit aus der impliziten Gleichung (Ereignisbedingung):

$$x_{\Delta,\min} + \tau_1 \frac{2\hat{x}_\Delta}{\tau_m} = k_i \left[ a_{0i_L} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_{ki_L} \cos \frac{2\pi k \tau_1}{\tau_m} + b_{ki_L} \sin \frac{2\pi k \tau_1}{\tau_m} \right) \right]$$

$$+ k_u \left[ a_{0u_a} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_{ku_a} \cos \frac{2\pi k \tau_1}{\tau_m} + b_{ku_a} \sin \frac{2\pi k \tau_1}{\tau_m} \right) \right] + ref.$$

Da die Fourierkoeffizienten sowohl von den Mittelwerten  $i_{Lm,\tau_m}$  und  $u_{am,\tau_m}$  als auch von der Einschaltzeit  $\tau_1$  abhängen, muß die Einschaltzeit iterativ berechnet werden. Da  $\tau_1$  durch den Regler während des Einschwingvorganges variiert wird und die Fourierkoeffizienten von  $\tau_1$  abhängen, sind die Fourierkoeffizienten zeitabhängig.

Bei Nutzung dieser Variante der Berücksichtigung der Überlagerung eines ereignisgesteuerten Anteils treten zwei Probleme auf:

- Aufgrund der bereits erwähnten schlechten Konvergenz in der Umgebung der Stellen der Unstetigkeit von  $\dot{x}$  mußte hier die Abbruchordnung von ca. 30 gewählt werden, um eine vertretbare Genauigkeit zu erzielen.
- Die Näherung  $\dot{u}_{m,\tau_m} \cdot \tau_m \ll u_{m,\tau_m}$  ist in diesem Beispiel nicht erfüllt. Dies führt zu einer deutlich sichtbaren Abweichung in Bild 2.14, in der transienten Phase.

Das zweite Problem läßt sich durch Überlagerung eines Anstieges  $m_i$  bzw.  $m_u$  so, daß  $\Psi(0) = \Psi(\tau_m)$  gilt, beseitigen. Die mittleren Anstiege betragen dann:

$$m_i = c_1 \tau_1 + c_2 \tau_2$$

$$m_u = c_{1,u} \tau_1 + c_{2,u} \tau_2.$$

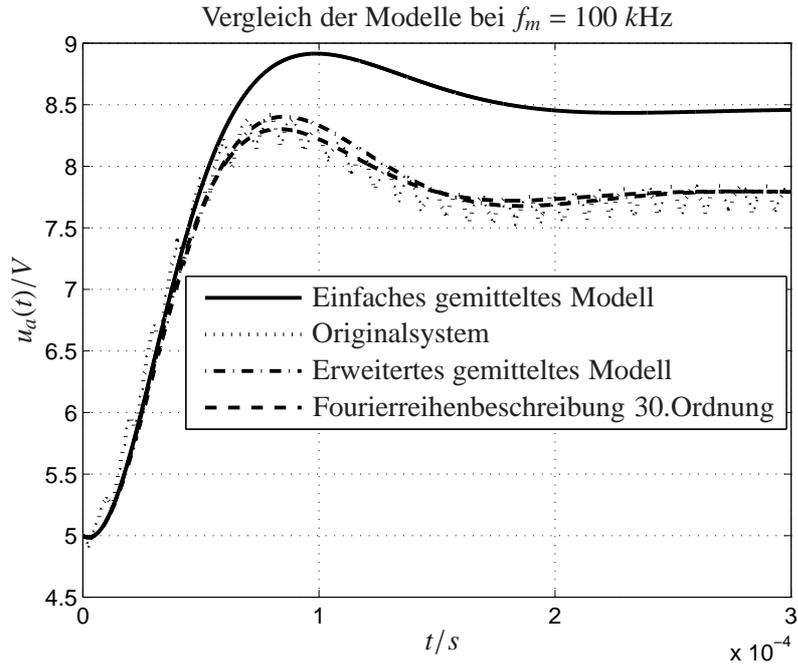


Bild 2.14: Transientverhalten Fourierreihenbeschreibung und geschaltetes Systemmodell.

Die Koeffizienten der Fourierreihe der korrigierten Welligkeitsfunktion betragen dann

$$\begin{aligned}
 a_{0_{i_L}} &= i_{Lm,\tau_m} \\
 a_{k_{i_L}} &= \frac{\tau_m}{2(\pi k)^2} (c_{2,i_L} - c_{1,i_L}) \left( 1 - \cos \frac{2\pi k \tau_1}{\tau_m} \right) \\
 b_{k_{i_L}} &= \frac{\tau_m (c_{1,i_L} - c_{2,i_L})}{2(\pi k)^2} \sin \frac{2\pi k \tau_1}{\tau_m} \\
 a_{0_{u_a}} &= u_{am,\tau_m} \\
 a_{k_{u_a}} &= \frac{\tau_m}{2(\pi k)^2} (c_{2,u_a} - c_{1,u_a}) \left( 1 - \cos \frac{2\pi k \tau_1}{\tau_m} \right) \\
 b_{k_{u_a}} &= \frac{\tau_m (c_{1,u_a} - c_{2,u_a})}{2(\pi k)^2} \sin \frac{2\pi k \tau_1}{\tau_m}
 \end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned}
 c_{1,i_L} &= c_1 - m_i \\
 c_{2,i_L} &= c_2 - m_i \\
 c_{1,u_a} &= c_{1,u} - m_u \\
 c_{2,u_a} &= c_{2,u} - m_u \cdot
 \end{aligned}$$

Bild 2.15 stellt den Verlauf der Transienten bei Eliminierung des mittleren Anstieges

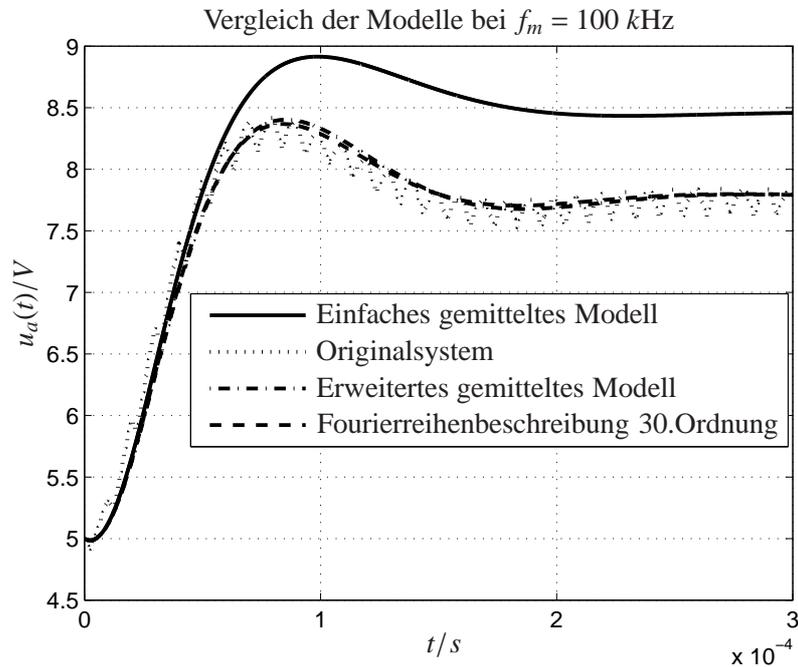


Bild 2.15: Transientverhalten Fourierreihenbeschreibung bei Berücksichtigung von  $m_i$  und  $m_u$  und geschaltetes Systemmodell.

aus der Fourierreihe dar. Das Problem, daß eine hohe Abbruchordnung zur Approximation der Umschaltereignisse notwendig ist, bleibt jedoch bestehen.

## 2.4 Eingebettete Abbildungen

### Modell

Bei der Systemmodellierung mit eingebetteten Abbildungen reduziert sich die Systembeschreibung auf die Zustandsgrößen zu den Ereigniszeiten und die Zeitspannen zwischen den Umschaltereignissen des hybriden Systems. Sind  $\mathbf{f}, g, \Phi, R$  und  $\mathbf{d}(t)$  bekannt, so läßt sich eine Funktion  $H$  finden, die den hybriden Zustand

$$\bar{\mathbf{s}}(k) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{q}(k) \\ \bar{\tau}(k) \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

zum Zeitpunkt des aktuellen Ereignisses auf den zum Zeitpunkt des nachfolgenden Umschaltereignisses abbildet:

$$\bar{\mathbf{s}}(k+1) = H(\bar{\mathbf{s}}(k)) . \quad (2.57)$$

Diese Funktion wird im folgenden als eingebettete Abbildung bezeichnet.

Zur Berechnung der eingebetteten Abbildung benötigt man die Lösung

$$\mathbf{x}(\tau) = \hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{q}(k), \tau) \quad (2.58)$$

der Differentialgleichung  $\mathbf{f}$ , Gl. (2.1) bei gegebener Störfunktion  $\mathbf{d}(\tau)$  und konstantem diskreten Zustand  $q$ .

Der Ereignisgenerator wird durch

$$\varphi = \Phi(\mathbf{x}, q, \mathbf{u}, \tau)$$

beschrieben. Die eingebettete Abbildung ist komponentenweise ermittelbar:

$$H_\tau(\bar{\mathbf{s}}(k)) = \bar{\tau}(k+1) . \quad (2.59)$$

Zunächst erfolgt die Berechnung der Aktivierungszeitspanne für verschiedene Reglervarianten und Ereignisgeneratoren.

### Kein Regler, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Die Ereignisgenerierung ist durch Weglassen des Argumentes  $\mathbf{u}$  mit

$$\Phi(\mathbf{x}, q, \tau) = \Phi(\hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{q}(k), \tau), \bar{q}(k), \tau)$$

vollständig modelliert. Ein Ereignis tritt ein, wenn  $\Phi(\hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{q}(k), \tau), \bar{q}(k), \tau) = 0$  gilt. Das Umstellen dieser Bedingung nach einer Variablen  $\nu$  wird im folgenden durch die Funktion  $\Phi_\nu^{-1}(\dots)$  beschrieben. Das Zeitintervall beträgt dann:

$$\bar{\tau}(k+1) = \Phi_\tau^{-1}(\hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{q}(k), \bar{\tau}(k+1)), \bar{q}(k)) . \quad (2.60)$$

Existieren für einen diskreten Zustand mehrere Ereignisse, an denen die Ereignisbedingung erfüllt ist, so gibt diese Funktion stets das zeitlich erste Ergebnis aus. Da die Zeitspanne sowohl in  $\hat{\mathbf{f}}$  als auch in  $\Phi$  vorkommt ist Gl. (2.60) allgemein in impliziter Form gegeben. Für die Spezialfälle Ereignissteuerung und Zeitsteuerung ist eine geschlossene explizite Form angebar:

- **Ereignissteuerung.** Hier vereinfacht sich der Ereignisgenerator zu  $\Phi(\hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{q}(k), \tau), \bar{q}(k))$  und die Zeitspanne beträgt:

$$\bar{\tau}(k+1) = \hat{\mathbf{f}}_{\tau}^{-1}(\Phi_{\mathbf{x}}^{-1}(\bar{q}(k)), \bar{\mathbf{x}}(k), \bar{q}(k)) . \quad (2.61)$$

- **Zeitsteuerung.** Der Ereignisgenerator hat die Funktion  $\Phi(\tau, \bar{q}(k))$  und die Zeitspanne beträgt:

$$\bar{\tau}(k+1) = \Phi_{\tau}^{-1}(\bar{q}(k)) . \quad (2.62)$$

### Abtastregler

Der Regler tastet die Systemzustände zu den Ereigniszeiten ab. Das Modell für den Abtastregler ist:

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{r}_d(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k-1), \bar{q}(k), \bar{\mathbf{d}}(k)) .$$

Daraus folgt die Ereignisgeneration zu:

$$\varphi = \Phi(\hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{q}(k), \tau), \bar{q}(k), \bar{\mathbf{u}}(k), \tau) .$$

Auch hier ist die Zeitspanne allgemein nur implizit darstellbar, kann jedoch für die beiden Fälle Ereignissteuerung und Zeitsteuerung in die Form von Gl. (2.61) bzw. Gl. (2.62) gebracht und somit explizit berechnet werden.

### Kontinuierlicher Regler

Der Regler wird durch Gl. (2.8) und Gl. (2.9) beschrieben. Die Lösung der Differentialgleichung (2.8) bei Kenntnis von  $\hat{\mathbf{f}}$  und  $\mathbf{d}(\tau)$  sei:

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_1(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{r}}(k), \bar{q}(k)) .$$

Dann läßt sich die Ereignisgeneration durch

$$\varphi = \Phi(\hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{q}(k), \tau), \bar{q}(k), \mathbf{r}_2(\hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{q}(k), \tau), \mathbf{r}_1(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{r}}(k), \bar{q}(k)), \bar{q}(k)), \tau)$$

modellieren. Eine explizite Lösung ist nur für Spezialfälle möglich. Selbst bei reiner Zeitsteuerung entsteht bei Verwendung eines kontinuierlichen Reglers eine überlagerte Ereignissteuerung, so daß hier im allgemeinen Fall keine explizite Lösung möglich ist. Ist jedoch die Änderung  $\bar{\mathbf{u}}(k) - \bar{\mathbf{u}}(k-1)$  vernachlässigbar gegenüber dem Mittelwert,

kann  $\mathbf{u}$  für die Ereignisgeneration durch den Mittelwert approximiert werden und eine explizite Näherung der Form Gl. (2.62) kann gefunden werden.

Mit Kenntnis von  $\bar{\tau}(k+1)$  ist der kontinuierliche Zustand im nächsten Umschaltmoment ermittelbar:

$$H_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{s}}(k)) = \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{q}(k), \bar{\tau}(k+1)) . \quad (2.63)$$

Der diskrete Zustand folgt dann mit:

$$H_q(\bar{\mathbf{s}}(k)) = \bar{q}(k+1) = g(\bar{q}(k), \Phi_e(\bar{\mathbf{x}}(k+1), \bar{\tau}(k+1), \bar{q}(k))) . \quad (2.64)$$

Aus der eingebetteten Abbildung läßt sich die *iterierte Abbildung*  $P$  ermitteln. Die iterierte Abbildung  $P$  gibt die Abhängigkeit von  $\mathbf{s}$  für aufeinanderfolgende Zyklen des diskreten Teilsystems an. Für einen Zyklus gelten Gl. (2.11) und Gl. (2.12):

$$\bar{\mathbf{s}}(m+1) = P(\bar{\mathbf{s}}(m)) . \quad (2.65)$$

Die iterierte Abbildung ist äquivalent zum Poin-Caré Schnitt [CAC<sup>+</sup>00], der in der Analyse kontinuierlicher Systeme verbreiteten Einsatz findet.  $m$  ist dabei der Index, der die Durchläufe durch die Zyklen des diskreten Teilsystems zählt.

Eine typische Anwendung der iterierten Abbildung ist die lokale Stabilitätsanalyse [Vid93]. In dieser Arbeit wird u.a. eine globale Stabilitätsanalyse und ein Optimierungsverfahren zur Bestimmung von Reglerparametern gezeigt. Beide basieren auf der Verwendung statistischer Kenngrößen, die aus der iterierten Abbildung gewonnen werden.

## Beispiel

Für den DC-DC-Wandler aus Bild 2.6 wird im CCM die eingebettete Abbildung ermittelt. Es gelte  $\mathbf{d} = \text{const.}$  und  $\mathbf{u} = \text{const.}$ . Das System ist für  $q = 1$  ein rein ereignisgesteuertes System und für  $q = 2$  ein rein zeitgesteuertes System. Mit der stückweisen Lösung von Gl. (2.13)

$$\hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{q}(k), \bar{\mathbf{d}}, \tau) = \begin{cases} \begin{pmatrix} i_L(k) + \frac{U_e}{L}\tau \\ u_a(k)e^{-\frac{\tau}{RC}} \end{pmatrix} & \text{für } q = 1 \\ \begin{pmatrix} a_{i,1}e^{\lambda_1\tau} + a_{i,2}e^{\lambda_2\tau} + b_i \\ a_{u,1}e^{\lambda_1\tau} + a_{u,2}e^{\lambda_2\tau} + b_u \end{pmatrix} & \text{für } q = 2 \end{cases} \quad (2.66)$$

mit

$$\begin{aligned}
a_{i,1} &= \frac{U_e - \bar{u}_a(k)}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\lambda_2(\bar{i}_L(k) - b_i)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
a_{i,2} &= \bar{i}_L(k) - a_{i,1} - b_i \\
a_{u,1} &= \frac{\bar{i}_L(k)}{C(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\bar{u}_a(k)}{RC(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\lambda_2(\bar{u}_a(k) - b_u)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
a_{u,2} &= u_a(k) - a_{u,1} \\
b_i &= \frac{U_e}{R} \\
b_u &= U_e \\
\lambda_{1/2} &= -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}},
\end{aligned}$$

wobei  $\bar{i}_L(k) = i_{ref}$ , kann die eingebettete Abbildung bestimmt werden:

$$H \begin{pmatrix} \bar{i}_L(k) \\ \bar{u}_a(k) \\ \bar{q}(k) \\ \bar{\tau}(k) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} i_{ref} \\ \bar{u}_a(k-1)e^{-\frac{L(i_{ref} - \bar{i}_L(k-1))}{RCU_e}} \\ 2 \\ L \frac{i_{ref} - \bar{i}_L(k-1)}{U_e} \end{pmatrix} & \text{für } q = 1 \\ \begin{pmatrix} a_{i,1}e^{\lambda_1(\tau_c - \bar{\tau}(k))} + a_{i,2}e^{\lambda_2(\tau_c - \bar{\tau}(k))} + b_i \\ a_{u,1}e^{\lambda_1(\tau_c - \bar{\tau}(k))} + a_{u,2}e^{\lambda_2(\tau_c - \bar{\tau}(k))} + b_u \\ 1 \\ \tau_c - \bar{\tau}(k) \end{pmatrix} & \text{für } q = 2 \end{cases}$$

Für dieses System existieren zwei iterierte Abbildungen

$$P_1 \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ 1 \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} = H \left( H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ 1 \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} \right)$$

und

$$P_2 \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ 2 \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} = H \left( H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ 2 \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} \right),$$

die gleichwertig sind. Bild 2.16 stellt die drei Komponenten  $\bar{i}_L$ ,  $\bar{u}_a$  und  $\bar{\tau}$  der iterierten Abbildung  $P_1$  dar. Da das System für  $q = 1$  ein rein ereignisgesteuertes System ist und für  $q = 2$  die Zeitsteuerung nur von der Dauer des Zustandes  $q = 1$  abhängt, ist die

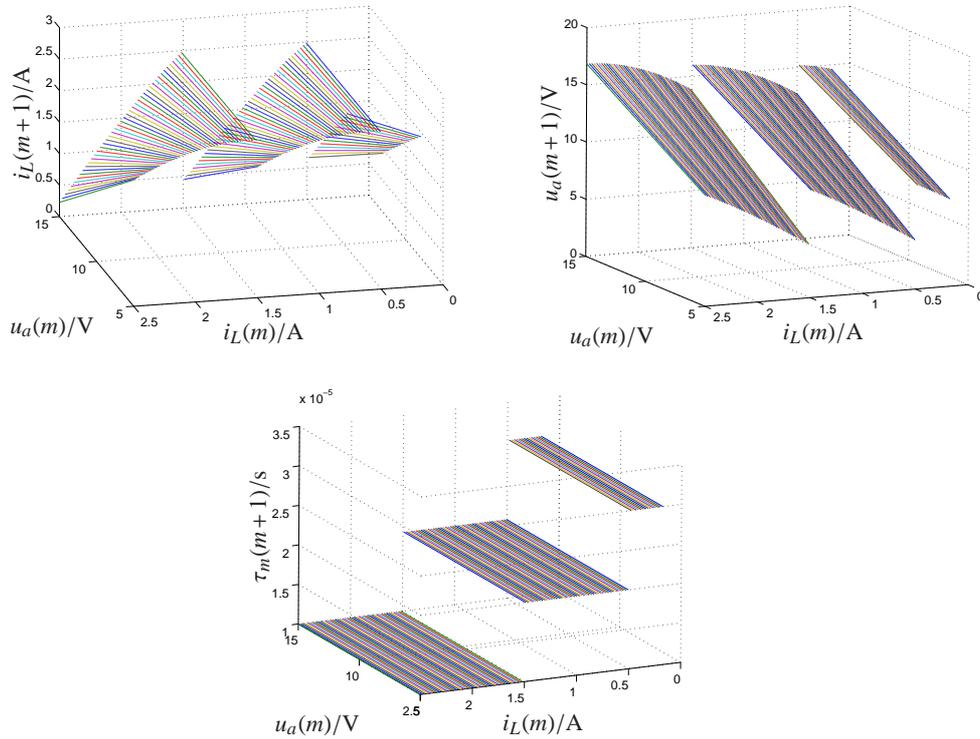


Bild 2.16: Iterierte Abbildung  $P_1$ .

iterierte Abbildung  $P_1(\bar{s})$  nur von  $\bar{x}$  abhängig und  $P_{\tau_m,1}(\bar{s})$  stellt eine Ausgabefunktion dar.

Der Wandler nach Bild 2.11 mit dem Parametersatz aus Tab. 2.2 wird mit Hilfe der iterierten Abbildung modelliert. Die Zustandsrückführung ist eine rein statische Funktion und kann deshalb als Bestandteil des Ereignisgenerators modelliert werden. Die Schaltflächenbeschreibungen lauten dann:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= k_i i_L + k_u u_a + ref - x_{\Delta, \min} - \tau \frac{2\hat{x}_\Delta}{\tau_m} \\ \phi_2 &= \tau_c - \bar{\tau}(k) - \tau. \end{aligned}$$

Mit der Lösung  $\hat{\mathbf{f}}$  erhält man für die Zeitspanne den Ausdruck:

$$\bar{\tau}(k+1) = \begin{cases} \tau : \tau \left( k_i \frac{U_c}{L} - \frac{2\hat{x}_\Delta}{\tau_m} \right) + k_u \bar{u}_a(k) e^{-\frac{\tau}{RC}} + k_i \bar{i}_L(k) + ref - x_{\Delta, \min} = 0 & \text{für } q = 1 \\ \tau_m - \bar{\tau}(k) & \text{für } q = 2 \end{cases}.$$

Für  $q = 1$  ergibt sich ein impliziter Ausdruck. Mit der Näherung  $\tau \ll RC$  kann durch Linearisierung der e-Funktion ein expliziter Ausdruck gefunden werden. Dann beträgt

die Zeitspanne:

$$\bar{\tau}(k+1) = \begin{cases} \frac{k_u \bar{u}_a(k) + k_i \bar{i}_L(k) + ref - x_{\Delta \min}}{\frac{2x_{\Delta}}{\tau_m} + \frac{k_u \bar{u}_a(k)}{RC} - k_i \frac{U_F}{L}} & \text{für } q = 1 \\ \tau_m - \bar{\tau}(k) & \text{für } q = 2 \end{cases}$$

Die eingebettete Abbildung lautet dann:

$$H \begin{pmatrix} \bar{i}_L(k) \\ \bar{u}_a(k) \\ \bar{q}(k) \\ \bar{\tau}(k) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \bar{i}_L(k-1) + \frac{U_F}{L} \bar{\tau}(k) \\ \bar{u}_a(k-1) e^{-\frac{\bar{\tau}(k)}{RC}} \\ 2 \\ \frac{k_u \bar{u}_a(k-1) + k_i \bar{i}_L(k-1) + ref - x_{\Delta \min}}{\frac{2x_{\Delta}}{\tau_m} + \frac{k_u \bar{u}_a(k-1)}{RC} - k_i \frac{U_F}{L}} \end{pmatrix} & \text{für } q = 1 \\ \begin{pmatrix} a_{i,1} e^{\lambda_1(\tau_m - \bar{\tau}(k-1))} + a_{i,2} e^{\lambda_2(\tau_m - \bar{\tau}(k-1))} + b_i \\ a_{u,1} e^{\lambda_1(\tau_m - \bar{\tau}(k-1))} + a_{u,2} e^{\lambda_2(\tau_m - \bar{\tau}(k-1))} + b_u \\ 1 \\ \tau_m - \bar{\tau}(k-1) \end{pmatrix} & \text{für } q = 2 \end{cases}$$

Die Zykluslänge des Wandlers beträgt  $k_m = 2$ . Die iterierte Abbildung ist die einfache

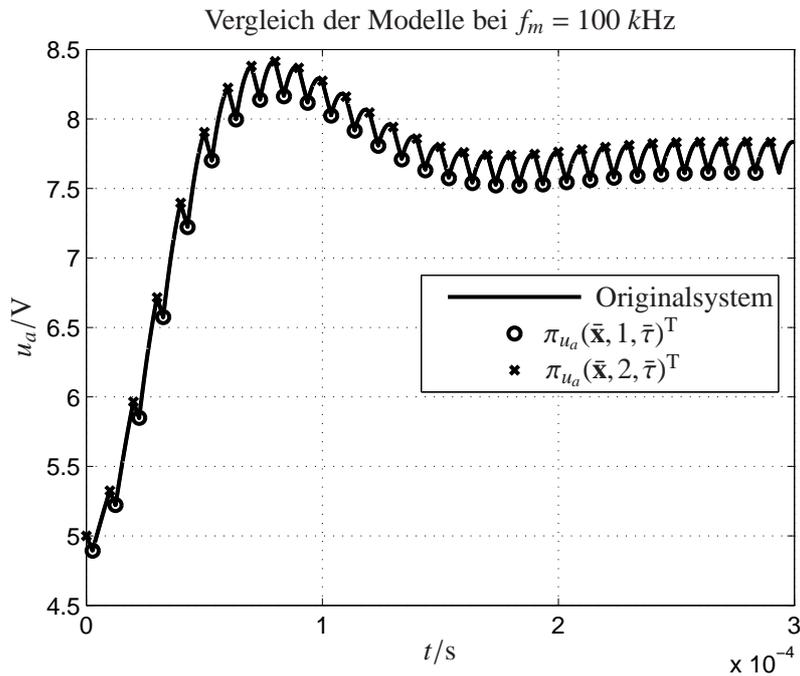


Bild 2.17: Vergleich iterierte Abbildung und geschaltetes Systemmodell.

Verkettung der eingebetteten Abbildung:

$$P(s) = H(H(s)) .$$

Da der Zyklus zwei Betriebsmodi enthält, existieren zwei iterierte Abbildungen  $P_1$  und  $P_2$ , die gleichwertig sind. Bild 2.17 zeigt den Vergleich zwischen der Trajektorie des Systemmodells und der Modellierung mit der iterierten Abbildung  $P_1$  bzw.  $P_2$ . Die iterierte Abbildung beschreibt das System vollständig und fehlerfrei an den Ereigniszeitpunkten.



## Kapitel 3

# Steuerung und spektrale Bewertung

### 3.1 Zielsetzung

Die spektrale Bewertung von Signalen spielt vor allem in den Untersuchungen zur elektromagnetischen Verträglichkeit (EMV) elektrotechnischer Geräte eine wichtige Rolle. Erste Probleme traten hier mit dem Beginn der Entwicklung der Starkstromtechnik gegen Ende des 19. Jahrhunderts auf. Damals verursachten starkstromtechnische Anlagen Störungen in den bereits bestehenden Telegrafianlagen. Die Folge davon war das erste EMV-Gesetz der Welt: “Gesetz über das Telegraphenwesen des Deutschen Reiches” vom 6.4.1892 [KBJ<sup>+</sup>98][Win95]. Auf diese ersten Probleme durch Wechselwirkungen zwischen elektrischen Geräten ist auch die Gründung des VDE im Jahr 1893 zurückzuführen [KBJ<sup>+</sup>98]. Zur Sicherung der EMV muß ein Gerät folgende Anforderungen erfüllen:

- Störfestigkeit: Das Gerät muß unter dem Einfluß äußerer Störungen, die während des normalen Betriebes auf das Gerät einwirken, noch fehlerfrei funktionieren.
- Störemission: Die vom Gerät während des normalen Betriebes emittierten Störungen dürfen vorgegebene, von der Anwendung abhängige Grenzwerte nicht überschreiten, um die Funktion anderer im Umfeld betriebener Geräte nicht zu beeinträchtigen.

Zu den äußeren Störungen gehören Impulse auf den Leitungen, meist verursacht durch elektrostatische Entladung (electro static discharge, ESD) aber auch eingekoppelte, von anderen Geräten verursachte AC-Komponenten. Die Störemission ist das Abstrahlen oder Einkoppeln von AC-Komponenten in Versorgungsleitungen und Signalleitungen anderer Geräte.

Bedingt durch das notwendige ständige Schalten hybrider Systeme treten hier funktionsbedingt AC-Komponenten im kontinuierlichen Zustand  $x$  auf. Diese sind zur Sicherung der EMV in elektrotechnischen hybriden Systemen im Entwurf zu berücksichtigen und in vorgegebenen Grenzwerten zu halten. In mechanischen/elektromechanischen hybriden Systemen sorgt das Auftreten von Wechselkomponenten für eine akustische Belästigung. Für diese sind ebenfalls Grenzwerte, die durch Lärmschutz- und Arbeitsschutzverordnungen vorgegeben werden, einzuhalten.

Störfestigkeit und Störemission werden in den EMV-Vorschriften spektral bewertet. Deshalb ist die spektrale Bewertung von Wechselkomponenten in hybriden Systemen ein wichtiger Aspekt beim Systementwurf.

Dieses Kapitel ist in drei Abschnitte unterteilt. Der erste Abschnitt behandelt Bewertungskriterien für die EMV. Im zweiten Abschnitt werden Möglichkeiten zur Beeinflussung der EMV untersucht. Der dritte Abschnitt stellt einige Applikationsbeispiele und die damit erreichten Ergebnisse vor.

## **3.2 Bewertungskriterien**

### **3.2.1 Messung**

Dieser Abschnitt konzentriert sich auf die Messung elektrischer emittierter Störgrößen. Die Messung unterteilt sich in die Messung abgestrahlter Störungen und leitungsgeführter Störungen. Die Aufnahme der Störungen erfolgt im ersten Fall mit Hilfe von Breitbandantennen in genormten Meßräumen [GG95] und im zweiten Fall durch Messung des Spannungsverlaufs an den Anschlüssen, wenn das Gerät an ein Netzwerk mit genormtem Impedanzgang angeschlossen ist. Das Netzwerk bildet dabei die äußere Beschaltung inklusive der Stromversorgung in der späteren Einsatzumgebung nach. Eine Übersicht zu den verschiedenen existierenden Normen zur EMV-gerechten

Messung der Störungen für verschiedene Anwendungen ist [KBJ<sup>+</sup>98] zu entnehmen.

Die Messung erfolgt mit Hilfe eines Meßempfängers nach Bild 3.1 [Kra00]. Dieser

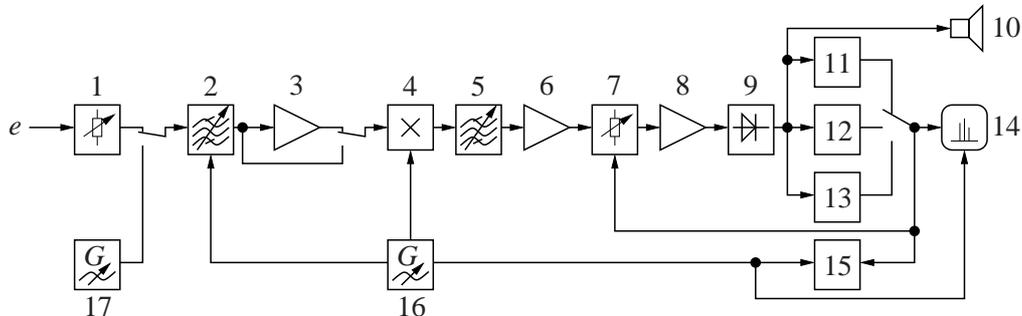


Bild 3.1: Meßempfänger. 1...Eingang mit veränderbarem Dämpfungsglied, 2...Abstimmbare HF-Selektion, 3...HF-Vorverstärker, 4...Mischer, 5...ZF-Selektion, 6...ZF-Verstärker, 7...Dämpfungsglied zur Übersteuerungskontrolle und Erhöhung des Rauschabstandes, 8...ZF-Verstärker, 9...Meßgleichrichter, 10...Lautsprecher zur akustischen Störemissionsbewertung, 11...Spitzenwertbewertungsschaltung, 12...Quasispitzenwertbewertungsschaltung, 13...Mittelwertbewertungsschaltung, 14...Anzeigeeinstrument, 15...Speicher, 16...Lokaloszillator, 17...Kalibrieroszillator

arbeitet als Überlagerungsempfänger mit HF-Vorselektion und variierender Empfangsfrequenz. Das Ausgangssignal des ZF-Verstärkers wird gleichgerichtet, mit verschiedenen Bewertungsschaltungen bewertet und in der Anzeige angezeigt. Die Meßvorschriften schreiben die Bandbreite des ZF-Filters, die Zeitkonstanten der Bewertungsschaltungen und die minimale Beobachtungszeit innerhalb eines Frequenzintervalls vor [Kra00] [VDE]. Tabelle 3.1 faßt die vorgeschriebenen Filterbandbreiten in Abhängigkeit vom Frequenzbereich zusammen. Die vorgeschriebenen Zeitkonstanten der Bewertungsschaltungen sind u.a. in [GG95] zu finden.

Die Bewertungsschaltungen sind auf die Anzeige des Effektivwerts bei sinusförmigem Eingangssignal geeicht [Kra00].

Bei idealer Mittelwertbildung zeigt die Anzeige für jede Frequenz den innerhalb der Filterbandbreite gemessenen und mit  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$  skalierten Mittelwert an. Das angezeigte Spektrum ist das mit der Filterfunktion des ZF-Filters gefaltete skalierte Amplituden-

Frequenzbereich	6 dB Bandbreiten $B_6$ des ZF-Filters		
	Spitzenwertdetektion	Quasispitzenwertdetektion	Mittelwertdetektion
Band A 9 kHz... 150 kHz	100 Hz... 300 Hz (200 Hz)	220 Hz	100 Hz... 300 Hz (200 Hz)
Band B 150 kHz... 30 MHz	8 kHz... 10 kHz (9 kHz)	9 kHz	8 kHz... 10 kHz (9 kHz)
Band C 30 MHz... 300 MHz	100 kHz... 500 kHz (120 kHz)	120 kHz	100 kHz... 500 kHz (120 kHz)
Band D 300 MHz... 1 GHz	100 kHz... 500 kHz (120 kHz)	120 kHz	100 kHz... 500 kHz (120 kHz)

Tabelle 3.1: Vorgeschriebene ZF-Bandbreiten nach IEC-CISPR 16-1:8.1993.

spektrum des Eingangssignals [Kru01].

Für das gemessene Amplitudenspektrum werden in den einzelnen Normen verschiedene anwendungsabhängige Grenzkurven vorgegeben. Soll ein Gerät eine Norm erfüllen, muß das gemessene Amplitudenspektrum vollständig unter der Grenzkurve liegen. Bild 3.2 stellt die Grenzkurve für Geräte mit Netzanschluß zum Einsatz in Wohngebieten bei Mittelwertmessung und Quasispitzenwertmessung dar.

Für integrierte Schaltungen wurden die nach Bild 3.3 parametrisierten Grenzwertklassen festgelegt, um u.a. den höheren Anforderungen im Automobilbereich gerecht zu werden. Die Parametrierung erfolgt über 3 Abschnitte. Bild 3.4 zeigt die Parametrierung K12m nach Bild 3.3.

### 3.2.2 Quantitative Bewertungskriterien

In dieser Arbeit werden nicht nur periodisch arbeitende DCCS sondern auch chaotisch arbeitende Systeme betrachtet. Da für chaotische Signale das Amplitudenspektrum nicht definiert ist wird im folgenden das ungefilterte und gefilterte Leistungsdichtespektrum als Bewertungskriterium genutzt. Das gefilterte Leistungsdichtespektrum ist für periodische und nichtperiodische Signale ermittelbar. Die in Vormessungen häufig

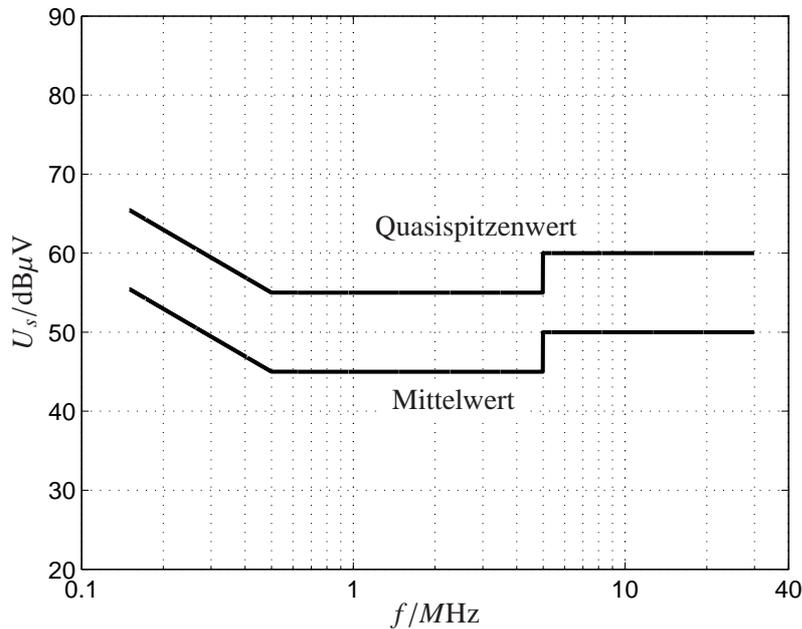


Bild 3.2: Grenzwerte für das Amplitudenspektrum der Spannung an den Versorgungsanschlüssen für Geräte mit Netzanschluß in Wohngebieten nach EN55011.

genutzten Spektrumanalysatoren zeigen ebenfalls das gefilterte Leistungsdichtespektrum an. Somit ist ein direkter Vergleich der Ergebnisse der Vormessung mit denen der Berechnungen möglich. Ziel dieses Kapitels ist die Formung des Leistungsdichtespektrums so, daß bestehende EMV-Forderungen eingehalten werden.

Zur Bewertung des Systems wird das stationäre Verhalten beurteilt. Die Beobachtung erfolgt immer innerhalb eines endlichen Zeitintervalls. Um in diesem Intervall das stationäre Verhalten bewerten zu können, erfolgt in diesem Kapitel die Initialisierung mit Kenngrößen des stationären Verhaltens.  $f_{\bar{\tau}(1)}(\tau)$  ist dann die stationäre Dichte der Intervall dauern. Um das stationäre Verhalten als solches kenntlich zu machen, wird der Index (1) im folgenden unterdrückt, d.h. die stationäre Dichte ist dann  $f_{\bar{\tau}}(\tau)$ .

### Leistungsdichtespektrum

Das Leistungsdichtespektrum eines Signals ist definiert durch

$$S_v(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left( |\tilde{v}_T(v(t))|^2 \right), \quad (3.1)$$

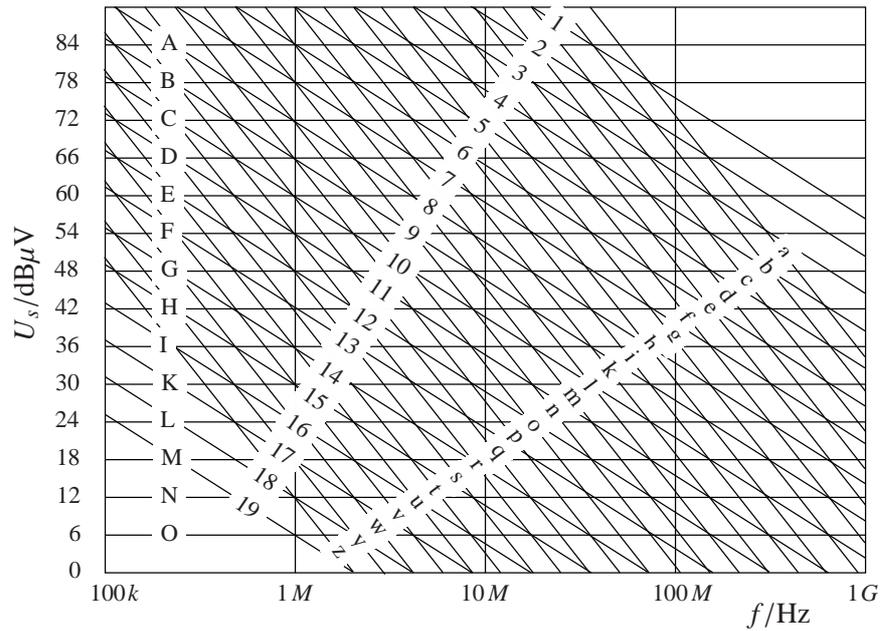


Bild 3.3: Grenzwerte für leitungsgeführte Störungen integrierter Schaltungen nach IEC61967.

wobei

$$\mathfrak{F}_T(v(t)) = \int_{t'=0}^T v(t') e^{j\omega t'} dt' \quad (3.2)$$

das Momentanspektrum des Signals  $v(t)$  ist.

Soll das berechnete Ergebnis direkt mit der Messung  $S_{v,\text{mess}}(\omega)$  verglichen werden, ist die Filtercharakteristik des ZF-Filters des Meßempfängers/Spektrumanalysators zu

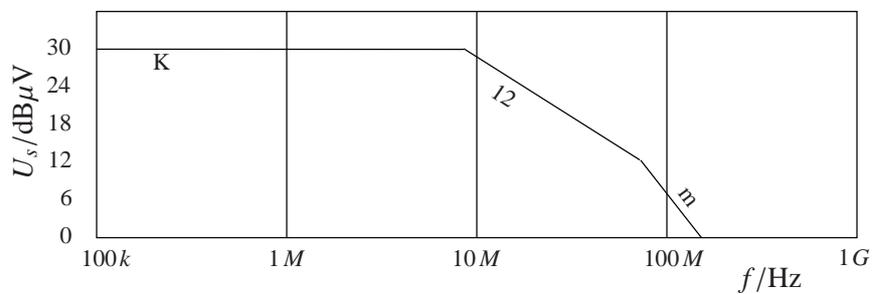


Bild 3.4: Beispiel einer Parametrierung der Grenzkurve nach IEC61967.

berücksichtigen, was hier durch Approximation mit einer Rechteckfunktion erfolgt:

$$S_{v,\text{mess}}(\omega) = \int_{\omega - \frac{B\omega}{2}}^{\omega + \frac{B\omega}{2}} S_v(\omega') d\omega' . \quad (3.3)$$

Diese Arbeit konzentriert sich auf Signale, die sich mit Hilfe gefilterter Impulsprozesse darstellen lassen. Das Prinzip zeigt Bild 3.5. Der Impulsprozeß

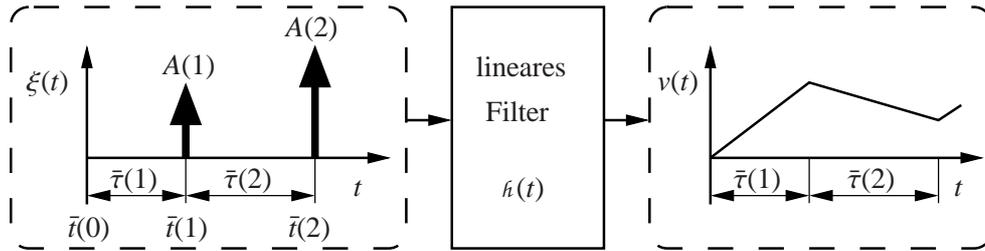


Bild 3.5: Gefilterter Impulsprozeß.

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A(k)\delta(t - \bar{\tau}(k)) \quad (3.4)$$

mit  $\bar{\tau}(0) = 0$  und

$$\bar{\tau}(k) = \sum_{i=1}^k \bar{\tau}(i) \quad (3.5)$$

ist das Eingangssignal eines linearen Filters mit der Impulsantwort  $h(t)$ . Bei geeigneter Wahl von  $A(k)$  und  $h(t)$  kann das Ausgangssignal

$$v(t) = \xi(t) * h(t) \quad (3.6)$$

das Zeitverhalten kontinuierlicher Teilzustände vieler technischer Systeme modellieren.

Bei periodischen Signalen dient anstelle des Leistungsdichtespektrums das Leistungsspektrum zur Bewertung der Störemission. Dieses läßt sich aus den Fourierkoeffizienten

$$c_{i\xi} = \frac{1}{\tau_m} \sum_{k=1}^{k_m} A(k)e^{j2\pi i \frac{\bar{\tau}(k)}{\tau_m}} \quad (3.7)$$

mit

$$p_{i\xi} = |c_{i\xi}|^2 \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

berechnen.

Das Leistungsdichtespektrum des Impulsprozesses ist dann:

$$S_{\xi}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left( \left| \sum_{k=1}^{n(\xi, T)} A(k) e^{j\omega \bar{\tau}(k)} \right|^2 \right). \quad (3.9)$$

Das Leistungsdichtespektrum des gefilterten Signals ist

$$S_v(\omega) = S_{\xi}(\omega) \cdot |\mathcal{H}(\omega)|^2, \quad (3.10)$$

wobei  $\mathcal{H}(\omega)$  der Übertragungsfaktor des linearen Filters ist.

### Beispiel 1

Das Schaltersignal eines DC-DC-Wandlers ist ein Rechtecksignal und soll durch einen gefilterten Impulsprozeß modelliert werden. Der Schalter wird jeweils zu geradzahli- gen Ereignissen ein- und zu ungeradzahli- gen Ereignissen ausgeschaltet. Die Modellie- rung ist mit  $A(k) = (-1)^k$ ,  $\bar{h}(t) = \epsilon(t)$  und  $v(0) = 1$  möglich, wobei

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

die Sprungfunktion ist. Der Übertragungsfaktor des linearen Filters ist  $\mathcal{H}(\omega) = \frac{1}{j\omega}$ ,  $\omega \neq 0$ .

### Beispiel 2

Der Spulenstrom eines DC-DC-Wandlers läßt sich durch eine stückweise zeitlich li- neare Funktion mit den Anstiegen  $c_1$  innerhalb der Zeitspannen  $\bar{\tau}(k)$ ,  $k$  ungerade und  $c_2$  innerhalb der Zeitspannen  $\bar{\tau}(k)$ ,  $k$  gerade beschreiben. Die Modellierung ist möglich mit  $A(k) = (-1)^k$ ,  $\bar{h}(t) = (c_1 + c_2)r(t)$ ,  $\dot{v}(0) = c_1$  und  $v(0) = v_0$ . Dabei ist

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

die Rampenfunktion. Der Übertragungsfaktor des linearen Filters ist  $\mathcal{H}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}$ ,  $\omega \neq 0$ .

### Gütekriterien

Die hier vorgestellten Gütekriterien dienen der quantitativen Bewertung des Leistungs- dichtespektrums. Mit den Kriterien soll die Bewertung der Einhaltung anwendungs- spezifischer Vorgaben emittierter Störungen erfolgen. Darüberhinaus dienen sie als

Kriterium für später in dieser Arbeit eingeführte Verfahren zur Optimierung des Leistungsdichtespektrums.

**Leistung innerhalb eines Frequenzintervalls**

$$J_1 = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} S_v(\omega') d\omega' \tag{3.11}$$

Dieses Kriterium ist identisch mit dem in [SVP95] angegebenen ‘‘Breitbandkriterium’’. Es kann verwendet werden, wenn Störungen innerhalb eines vorgegebenen Frequenzintervalls möglichst vermieden oder darin konzentriert werden sollen. Setzt man  $\omega_{\max} - \omega_{\min} = B_\omega$ , ist das Ergebnis identisch mit der gemessenen Leistung an der Stelle  $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_{\max} + \omega_{\min})$ .

Bei periodischen Prozessen ist das äquivalente Kriterium

$$J_1 = \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} p_i \tag{3.12}$$

mit  $i_{\min} = \frac{\omega_{\min} \tau_m}{2\pi}$  und  $i_{\max} = \frac{\omega_{\max} \tau_m}{2\pi}$ .

**Maximale Leistungsdichte**

Die maximale Leistungsdichte bei nichtperiodischen Prozessen

$$J_2 = \max_{\omega} (S_v(\omega)), \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}] \tag{3.13}$$

oder die maximale spektrale Leistung bei periodischen Prozessen

$$J_2 = \max_i (p_i), i \in [i_{\min}, i_{\max}] \tag{3.14}$$

ist den EMV-Vorschriften am stärksten verwandt. Bei periodischen Prozessen ist dieses Maximum identisch mit der gemessenen maximalen Leistung, solange der Abstand zweier Harmonischer größer ist als die Filterbandbreite. In den Bereichen konstanter Grenzkurve ist das Konformitätskriterium, ob dieses Maximum unter oder über der Grenzkurve liegt.

Bei engerem Abstand zwischen den Spektrallinien oder im nichtperiodischen Fall kann ein aus Gl. (3.11) und Gl. (3.13) bzw. Gl. (3.12) und Gl. (3.14) verkettetes Kriterium gebildet werden, um die Messung nachzubilden

$$J_{2a} = \max_{\omega} \left( \int_{\omega - \frac{B_\omega}{2}}^{\omega + \frac{B_\omega}{2}} S_v(\omega') d\omega' \right), \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max} \tag{3.15}$$

$$J_{2a} = \max_i \left( \sum_{i=i_0 - \frac{\Delta i}{2}}^{i_0 + \frac{\Delta i}{2}} p_i \right), i_{\min} \leq i_0 \leq i_{\max} \tag{3.16}$$

mit  $\Delta i = B_\omega \frac{\tau_m}{2\pi}$  und  $i_0 = \frac{\omega_0 \tau_m}{2\pi}$ .

### Differenz aus maximaler und minimaler Leistungsdichte

Das Kriterium lautet für nichtperiodische Prozesse

$$J_3 = \max_{\omega} (S_v(\omega)) - \min_{\omega} (S_v(\omega)), \quad \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}] \quad (3.17)$$

und für periodische Prozesse:

$$J_3 = \max_i (p_i) - \min_i (p_i), \quad i \in [i_{\min}, i_{\max}]. \quad (3.18)$$

Wird  $J_3$  minimiert, so ist das Resultat ein maximal flaches Spektrum, was im betrachteten Intervall zu einer Minimierung der maximalen spektralen Leistung führt, wenn die Gesamtleistung im betrachteten Intervall konstant bleibt. Auch hier ist die Berücksichtigung der Bandbreite des Meßgerätes durch Verkettung von Kriterien analog zu Gl. (3.15) und Gl. (3.16) möglich:

$$J_{3a} = \max_{\omega} \left( \int_{\omega - \frac{B_\omega}{2}}^{\omega + \frac{B_\omega}{2}} S_v(\omega') d\omega' \right) - \min_{\omega} \left( \int_{\omega - \frac{B_\omega}{2}}^{\omega + \frac{B_\omega}{2}} S_v(\omega') d\omega' \right), \quad \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$$

$$J_{3a} = \max_i \left( \sum_{i=i_0 - \frac{\Delta i}{2}}^{i_0 + \frac{\Delta i}{2}} p_i \right) - \min_i \left( \sum_{i=i_0 - \frac{\Delta i}{2}}^{i_0 + \frac{\Delta i}{2}} p_i \right), \quad i_{\min} \leq i_0 \leq i_{\max}.$$

### Differenz benachbarter Leistungen

Dieses Kriterium läßt sich nur für periodische Prozesse berechnen:

$$J_4 = \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}-1} |p_{i+1} - p_i|. \quad (3.19)$$

Es steht nicht in direktem Zusammenhang mit bestehenden EMV-Forderungen. Jedoch ist der Wert ebenfalls gering, wenn das Leistungsspektrum flach ist. Für einfache Prozesse ist ein analytischer Ausdruck für  $J_4$  angebar.

#### Beispiel 1

Für einen Impulsprozeß mit  $A(k) = 1$  erhält man:

$$J_4 = \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} \left| \sum_{k=1}^{k_m-1} \sum_{l=k+1}^{k_m} \cos 2\pi(i+1) \frac{\bar{i}(k) - \bar{i}(l)}{\tau_m} - \cos 2\pi i \frac{\bar{i}(k) - \bar{i}(l)}{\tau_m} \right|.$$

#### Beispiel 2

Für einen Impulsprozeß mit  $A(k) = (-1)^k$  erhält man:

$$J_4 = \frac{4}{\tau_m^2} \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}-1} \left| \sum_{k=1}^{k_m-1} \sum_{l=1}^{k_m} (-1)^k (-1)^l \sin \frac{\pi}{\tau_m} (\bar{i}(k) - \bar{i}(l)) (2i+1) \sin \frac{\pi}{\tau_m} (\bar{i}(k) - \bar{i}(l)) \right|. \quad (3.20)$$

Sollen bei einem zeitgesteuerten System die emittierten Störungen verringert werden, so besteht eine Möglichkeit in der Anwendung eines Optimierungsalgorithmus auf der Basis von Gl. (3.20), der die Ereigniszeiten  $\bar{i}(k)$  und  $\bar{i}(l)$  bestimmt.

**Beispiel 3**

Modellierung des Schaltersignals eines DC-DC-Wandlers mit  $A(k) = (-1)^k$ ,  $\mathcal{H}(\omega) = \frac{1}{\omega}$ .

Das Kriterium ist:

$$J_4 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} \left| \frac{1}{i^2} \sum_{k=1}^{k_m-1} \sum_{l=k}^{k_m} (-1)^k (-1)^l \cos \frac{2\pi(i+1)}{\tau_m} (\bar{i}(k) - \bar{i}(l)) - \frac{1}{(i+1)^2} \sum_{k=1}^{k_m-1} \sum_{l=k}^{k_m} (-1)^k (-1)^l \cos \frac{2\pi(i+1)}{\tau_m} (\bar{i}(k) - \bar{i}(l)) \right|.$$

**Berücksichtigung vorgegebener Grenzkurven.**

Alle bisher vorgestellten Kriterien sind dann minimal, wenn die spektrale Leistung des Signals im betrachteten Frequenzintervall gleichverteilt ist. Die EMV-Richtlinien geben jedoch nichtkonstante Grenzkurven vor. Soll hier maximale Sicherheit gegen Verletzung der Richtlinien erreicht werden, bietet sich ein Kriterium an, das minimal ist, wenn das erzeugte Spektrum mit konstantem maximalen Abstand unter der Grenzkurve liegt. Wird die vorgegebene Grenzkurve durch die Funktion  $\mathcal{H}_u(\omega)$  beschrieben, so beurteilt das Kriterium

$$J_5 = \max_{\omega} \left( \frac{\int_{\omega - \frac{B\omega}{2}}^{\omega + \frac{B\omega}{2}} S_v(\omega') d\omega'}{\mathcal{H}_u(\omega)} \right), \quad \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}], \quad (3.21)$$

ob und um wieviel die Grenzkurve über- bzw. unterschritten wird.  $J_5$  ist eine Verkettung von  $J_1$ ,  $J_2$  und der Grenzkurve. Ist  $J_5 = 1$ , so wird die Grenzkurve vom Spektrum an mindestens einer Stelle erreicht und die betreffende Vorschrift gerade noch erfüllt. Die Maximierung des Sicherheitsabstandes zwischen der vorgegebenen Grenzkurve und dem Spektrum entspricht auch hier der Minimierung des Kriteriums.

In Abschnitt 3.4.1 wird dieses Kriterium verwendet, um eine durch Optimierung bestimmte Ansteuersequenz für einen DC-DC-Wandler zu ermitteln.

Im folgenden Abschnitt werden statistische Größen berechnet, die zur Berechnung des Leistungsdichtespektrums oder zur Bewertung spektraler Eigenschaften des Prozesses benutzt werden können. Für Spezialfälle werden Methoden zur Berechnung des Leistungsdichtespektrums aus diesen Größen vorgestellt.

## Dichten, Momente, charakteristische Funktionen und Autokorrelationsfunktion

### Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion

$$F_X(\xi) = P\{X < \xi\} \quad (3.22)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die zufällige Veränderliche einen Wert annimmt, der kleiner als  $\xi$  ist [WS86]. Aus der Verteilungsfunktion läßt sich die Dichtefunktion berechnen.

### Dichtefunktion

Die Dichtefunktion  $f_X(\xi)$  ist über

$$F_X(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_X(v) dv \quad (3.23)$$

definiert, [WS86] und kann durch Ableiten von Gl. (3.23) berechnet werden, wenn Gl. (3.22) differenzierbar ist.

In den hier betrachteten DCCS treten Dichten von zwei Arten von Variablen auf: Dichten  $f_x(\xi)$  des kontinuierlichen Zustands dienen u.a. der Systemmodellierung bezüglich der Regelungsaufgabe, d.h. der Einhaltung des kontinuierlichen Zustands von vorgegebenen Intervallgrenzen. Diese Dichten werden in Kapitel 4 für die Parameterbestimmung von Reglern eingesetzt.

Dichten  $f_{\bar{\tau}}(\tau)$  von Zeitintervallen und  $f_{\bar{i}(k)}(t)$  von Ereigniszeiten mit  $\bar{i}(0) = 0$  werden in diesem Kapitel zur Berechnung der Autokorrelationsfunktion und des Leistungsdichtespektrums benutzt. Dazu werden alle Dichten  $f_{\bar{i}(k_m \cdot i)}(\tau) \dots f_{\bar{i}(k_m \cdot i - k_m + 1)}(\tau)$  der Zyklen  $m$  benötigt. Die Dichte  $f_{\bar{i}(i)}(t)$  läßt sich aus der gemeinsamen Dichte  $f_{\bar{i}(k), \bar{\tau}}(t, \tau)$  berechnen. Aufgrund der Abhängigkeit  $\bar{\tau}(k+1) = H_{\bar{\tau}}(\bar{\tau}(k))$  kann durch Einsetzen in Gl. (2.4) eine  $k$ -Schritt Abbildung

$$\bar{i}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} H_{\bar{\tau}}^i(\bar{\tau}) \quad \text{mit } H_{\bar{\tau}}^0(\bar{\tau}) = \bar{\tau}$$

gefunden werden, die jede Ereigniszeit  $\bar{i}(k)$  aus dem Anfangsintervall bestimmt. Damit ist die bedingte Dichte für ein festes  $\bar{\tau}$  ein Dirac-Impuls an der Stelle  $t = \sum_{i=0}^{k-1} H_{\bar{\tau}}^i(\bar{\tau})$ . Die gemeinsame Dichte an der Stelle  $\bar{\tau}$  ist dann ein gewichteter Dirac-Impuls. Die Wichtung ist [WS86]:

$$\frac{f_{\bar{\tau}}(\tau)}{\left| \frac{d \sum_{i=0}^{k-1} H_{\bar{\tau}}^i(\tau)}{d\tau} \right|}.$$

Damit beträgt die gemeinsame Dichte:

$$f_{\bar{\tau}(k),\bar{\tau}}(t, \tau) = \delta \left( t - \sum_{i=0}^{k-1} H_{\tau}^i(\tau) \right) \frac{f_{\bar{\tau}}(\tau)}{\left| \frac{d \sum_{i=0}^{k-1} H_{\tau}^i(\tau)}{d\tau} \right|}. \quad (3.24)$$

Die Dichte der Ereigniszeiten ist gleich der Randdichte:

$$f_{\bar{\tau}(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{\tau}(k),\bar{\tau}}(t, \tau) d\tau. \quad (3.25)$$

Da in den hier behandelten Systemen nur positive Zeitintervalle auftreten können, sind die Dichten von Zeitintervallen und Ereigniszeiten nur für positive Zeiten verschieden von Null. Deshalb kann die untere Integrationsgrenze zu Null gesetzt werden. Existiert ein Maximalwert  $\bar{\tau}_{\max} = \max(H_{\tau}(\tau))$ , so kann die obere Integrationsgrenze auf  $k\bar{\tau}_{\max}$  gesetzt werden, da dann die Dichte für  $t > k\bar{\tau}_{\max}$  Null ist.

Für stückweise lineare Markovabbildungen wurde in [Kru01] ein Verfahren zur Berechnung der Summe in Gl. (3.24) vorgestellt. Dieses kann zusammen mit Gl. (3.24) und Gl. (3.25) zur Berechnung der Dichten der Ereigniszeiten und zur Berechnung der Autokorrelationsfunktion und der charakteristischen Funktionen genutzt werden.

Für stückweise lineare Abbildungen ist die Dichte  $f_{\bar{\tau}}(\tau)$  stückweise konstant [Göt98].  
Wegen

$$f_y(v) = \frac{f_x(h^{-1}(v))}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{h^{-1}(v)}}, \quad (3.26)$$

wobei  $f_y(v)$  die Ausgangsdichte und  $f_x(v)$  die Eingangsdichte der Abbildung  $h$  ist [WS86], sind dann die Dichten  $f_{\bar{\tau}(k)}(t)$  ebenfalls stückweise konstant. Für große Ordnung  $k$  konvergieren die Dichten  $f_{\bar{\tau}(k)}(t)$  gegen Gaußverteilungen [BS].

### Beispiel

Aufeinanderfolgende Zeitintervalle werden mit der Bernoulliabbildung generiert:

$$\bar{\tau}(k+1) = 2\bar{\tau}(k) \bmod 1.$$

Die Abbildung gehört zu den stückweise linearen voll streckenden Abbildungen und hat die stationäre Dichte einer Gleichverteilung:

$$f_{\bar{\tau}}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \tau \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die  $i$ -te Iterierte der Abbildung ist:

$$H_i^i(\tau) = 2^i \tau \bmod 1 \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Damit ergibt sich die gemeinsame Dichte zu:

$$f_{\bar{i}(k),\bar{\tau}}(t, \tau) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} 2^i} \delta \left( t - \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \tau \bmod 1 \right) \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (3.27)$$

Bild 3.6 zeigt die Projektionen gemeinsamer Dichten in die  $t, \tau$ -Ebene für die Ordnun-

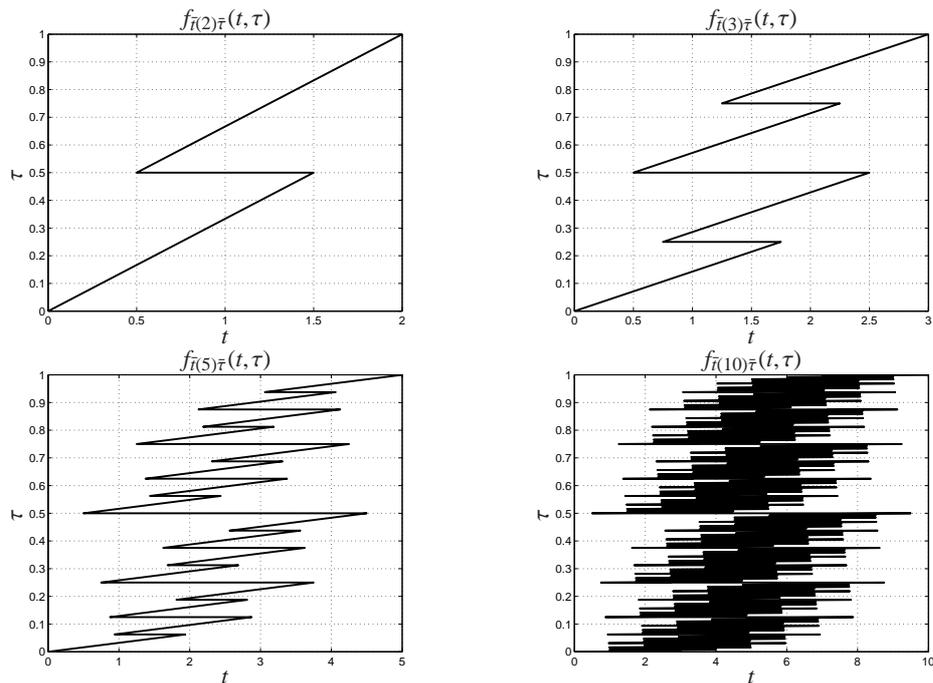


Bild 3.6: Projektion der gemeinsamen Dichte  $f_{\bar{i}(k),\bar{\tau}}(t, \tau)$  in die  $t, \tau$ -Ebene.

gen 2, 3, 5 und 10. Dabei kennzeichnet die Linie die Stelle, an der Gl. (3.27) verschieden von Null ist. Bild 3.7 zeigt die daraus gewonnenen Dichten  $f_{\bar{i}(k)}(t)$ . Das Bild zeigt, daß die Dichte mit zunehmender Ordnung gegen die Dichte einer Gaußverteilung konvergiert.

### Momente

Das  $n$ -te Moment einer Zufallsgröße  $x$  ist definiert durch:

$$m_{nx} = E(x^n) = \int_{-\infty}^{\infty} v^n f_X(v) dv. \quad (3.28)$$

Die wichtigsten Momente sind  $m_{1x} \dots m_{4x}$ , aus denen Mittelwert, Varianz, Schiefe und Excess berechnet werden können. Besondere Bedeutung kommt dabei den ersten bei-

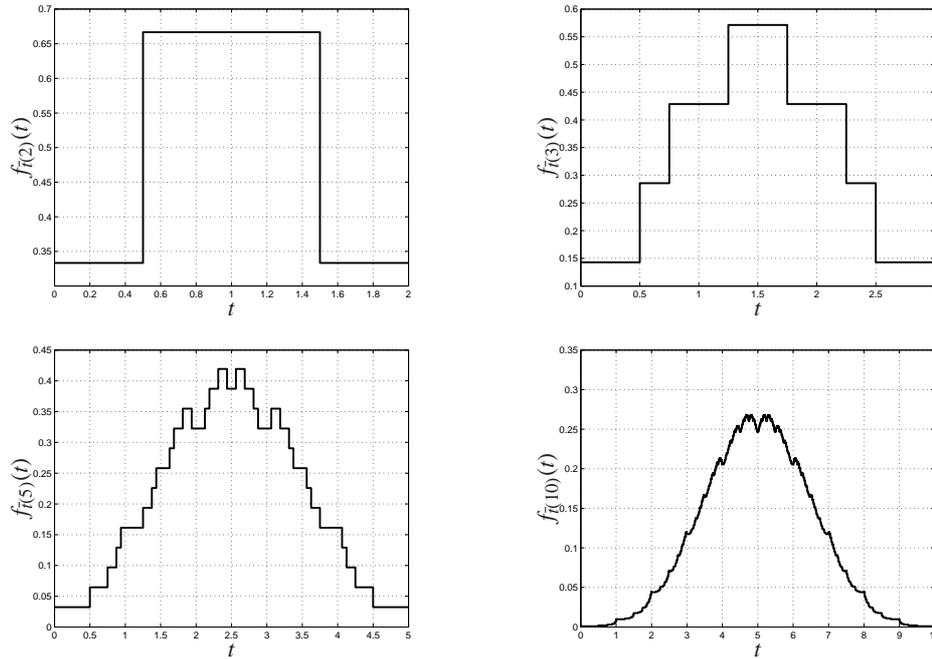


Bild 3.7: Dichte der Ereigniszeiten  $f_{\bar{\tau}(k)}(t)$ .

den Momenten zu. Diese werden in Kapitel 4 zur Parameterbestimmung von Reglern benutzt.

Zur Bewertung spektraler Eigenschaften werden die Momente der Ereigniszeitpunkte  $\bar{\tau}(k)$  benötigt. An späterer Stelle wird ein grobes Kriterium zur Bewertung der Performance eines Prozesses zur Verringerung der Störabstrahlung unter Nutzung von Varianz und Excess vorgestellt.

Der Mittelwert der Ereigniszeitpunkte ist direkt durch Erwartungswertbildung bestimmbar. Mit

$$\bar{\tau}(k) = \sum_{i=1}^k \bar{\tau}(i)$$

erhält man:

$$m_{1\bar{\tau}(k)} = \sum_{i=1}^k m_{1\bar{\tau}(i)} = km_{1\bar{\tau}} . \tag{3.29}$$

Für das zweite Moment erhält man die Reihe:

$$m_{2\bar{\tau}(k)} = km_{2\bar{\tau}} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} E(\bar{\tau}(i)\bar{\tau}(i+1)) . \tag{3.30}$$

Für die Varianz der Ereigniszeiten erhält man die Iterationsvorschrift

$$\sigma_{\bar{\tau}(k)}^2 = \sigma_{\bar{\tau}(k-1)}^2 + \sigma_{\bar{\tau}}^2 + 2(E(\bar{\tau}(k-1)\bar{\tau}) - E(\bar{\tau}(k-1))E(\bar{\tau})) , \tag{3.31}$$

wobei

$$2(\mathbb{E}(\bar{i}(k-1)\bar{\tau}) - \mathbb{E}(\bar{i}(k-1))\mathbb{E}(\bar{\tau})) = 2\rho_{\bar{i}(k-1), \bar{\tau}}^2$$

die (Kreuz-) Kovarianzfunktion von  $\bar{i}(k-1)$  und  $\bar{\tau}(k)$  ist. Damit ist die Varianz von  $\bar{i}(k)$ :

$$\sigma_{\bar{i}(k)}^2 = k\sigma_{\bar{\tau}}^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \rho_{\bar{i}(i), \bar{\tau}(i+1)}^2.$$

Wird die Varianz aus dem zweiten Moment berechnet, so erhält man mit Gl. (2.59)

$$\sigma_{\bar{i}(k)}^2 = km_{2\bar{\tau}} - (km_{1\bar{\tau}})^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{E}(\bar{i}(i)\bar{\tau}(i+1)),$$

wobei

$$\mathbb{E}(\bar{i}(i)\bar{\tau}(i+1)) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{l=0}^{i-1} H_{\bar{\tau}}^l(\bar{\tau})\right) H_{\bar{\tau}}^i(\bar{\tau})\right) \quad (3.32)$$

ist und mit

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{l=0}^{i-1} H_{\bar{\tau}}^l(\bar{\tau})\right) H_{\bar{\tau}}^i(\bar{\tau})\right) = \int_0^{\infty} f_{\bar{\tau}}(\xi) \left(\sum_{l=0}^{i-1} H_{\bar{\tau}}^l(\xi)\right) H_{\bar{\tau}}^i(\xi) d\xi$$

berechnet werden kann. Bei voll streckenden stückweise linearen Abbildungen vereinfacht sich Gl. (3.32) aufgrund der konstanten stationären Dichte zu:

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{l=0}^{i-1} H_{\bar{\tau}}^l(\bar{\tau}(1))\right) H_{\bar{\tau}}^i(\bar{\tau}(1))\right) = c \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \left(\sum_{l=0}^{i-1} H_{\bar{\tau}}^l(\xi)\right) H_{\bar{\tau}}^i(\xi) d\xi. \quad (3.33)$$

Für stückweise lineare Markovabbildungen kann Gl. (3.32) wegen der stückweise konstanten Dichte in einzelne Stücke der Form Gl. (3.33) zerlegt werden.

### Beispiel

Aufeinanderfolgende Zeitintervalle werden mit  $H_{\bar{\tau}}(\bar{\tau}) = 2\bar{\tau} \bmod 1$ ,  $\bar{\tau} \in [0; 1]$  generiert.

Mit der  $n$ -ten Iterierten  $H_{\bar{\tau}}^n(\bar{\tau}) = 2^n \bar{\tau} \bmod 1$ ,  $\bar{\tau} \in [0; 1]$  und der stationären Dichte

$$f_{\bar{\tau}}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi \in [0; 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man

$$\sigma_{\bar{\tau}}^2 = \int_0^1 \xi d\xi - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{E}(\bar{i}(1)\bar{\tau}(2)) = \int_0^1 \xi \cdot 2\xi \bmod 1 d\xi = \frac{7}{24},$$

$$\mathbb{E}(\bar{i}(2)\bar{\tau}(3)) = \int_0^1 (4\xi \bmod 1(2\xi \bmod 1 + \xi)) d\xi = \frac{9}{16}$$

usw..

Soll die Varianz als grobes Kriterium zur Bewertung von Eigenschaften des Leistungsdichtespektrums benutzt werden, kann diese mit Hilfe der o.g. Gleichung ermittelt werden. Für kleine  $k$  sind  $\bar{r}(k-1)$  und  $\bar{r}(k)$  stark korreliert. Hier ist Gl. (3.33) zu verwenden. Für große  $k$  verschwindet diese Korrelation.

Das Verschwinden der Korrelation läßt sich folgendermaßen erklären: Die Escape rate der eingebetteten Abbildung am Punkt  $\tau$  ist definiert durch [CAC<sup>+</sup>00]:

$$\gamma_{H_\tau}(\tau) = \left| \frac{dH_\tau(\tau)}{d\tau} \right| .$$

Sie ist ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der die Trajektorie einen instabilen periodischen Orbit verläßt. Die Escape rate habe am Fixpunkt  $\tau_f$  der Abbildung  $H_\tau$  den Wert  $\gamma_{H_\tau}(\tau_f)$ . Dann hat die Escape rate der  $k$ -ten Iterierten der Abbildung den Wert  $\gamma_{H_\tau^k}(\tau_f) = \left(\gamma_{H_\tau}(\tau_f)\right)^k$ . Die Betrachtung erfolgt zunächst für stückweise lineare Abbildungen  $H_\tau(\tau)$ . Das Segment der Abbildung, auf dem sich der Fixpunkt befindet, bildet auf das Intervall  $[u, o]$  ab. Das Intervall im Definitionsbereich, welches auf das vollständige Intervall  $[u, o]$  abgebildet wird, hat die Breite

$$2\epsilon = \frac{o - u}{\gamma_{H_\tau}(\tau_f)} .$$

Das Eingangsintervall, welches nach  $k$ -facher Iteration auf das vollständige Intervall  $[u, o]$  abgebildet wird, hat dann die Breite:

$$2\epsilon = \frac{o - u}{\left(\gamma_{H_\tau}(\tau_f)\right)^k}$$

und konvergiert exponentiell mit  $k$  gegen Null. Für hohe Werte von  $k$  kann ein Wert in der unmittelbaren Umgebung  $\epsilon$  vom Fixpunkt jeden beliebigen Ausgabewert in dem Intervall  $[u, o]$  generieren. Die gleiche Überlegung läßt sich für jeden beliebigen periodischen Orbit  $k$ -ter Ordnung durchführen. Da nach [CAC<sup>+</sup>00] periodische Orbits eine Rasterung der Abbildung darstellen, deren Abstand mit zunehmender Ordnung exponentiell feiner wird und die den gesamten Definitionsbereich abdeckt, ist die oben aufgeführte Überlegung für jede Umgebung  $\epsilon$  eines beliebigen Wertes innerhalb des Definitionsbereiches der Abbildung gültig. Das heißt jedes beliebige kleine Eingangsintervall innerhalb des Definitionsbereiches wird für große  $k$  auf den gesamten Wertebereich der Abbildung abgebildet.  $\bar{r}$  und  $\bar{r}(k)$  sind somit für große  $k$  unkorreliert. Mit

Hilfe von Ähnlichkeitstransformationen kann diese Aussage auch auf Abbildungen erweitert werden, die nicht stückweise linear sind.

Für voll streckende stückweise lineare Abbildungen mit dem Definitionsbereich und Wertebereich  $[0, 1]$  kann die oben genannte Unkorreliertheit analytisch gezeigt werden. Der Erwartungswert  $E(\bar{\tau} \cdot \bar{\tau}(k))$  läßt sich durch

$$E(\bar{\tau} \cdot \bar{\tau}(k)) = \int_0^{\infty} f_{\tau}(\tau) \tau H_{\tau}^k(\tau) d\tau \quad (3.34)$$

berechnen. Aufgrund der Einschränkungen bezüglich der Abbildung gilt

$$f_{\tau}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \tau \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und  $H_{\tau}^k(\tau)$  ist ebenfalls stückweise linear und besteht aus  $n^k$  Stücken, wenn  $n$  die Anzahl der Segmente von  $H_{\tau}(\tau)$  ist. Dann kann Gl. (3.34) in eine Summe von Teilintegralen zerlegt werden:

$$E(\bar{\tau} \cdot \bar{\tau}(k)) = \sum_{i=1}^{n^k} \int_{\tau_{i\min}}^{\tau_{i\max}} \tau \frac{\tau - \tau_{\min}}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} d\tau . \quad (3.35)$$

Für  $\tau_{\min} \gg \tau_{\max} - \tau_{\min}$  konvergiert das Integral gegen  $\frac{1}{2}\tau$ . Für  $n^k \rightarrow \infty$  besitzen fast alle Teilintegrale den Wert  $\frac{1}{2}\tau$ . Andererseits geht für  $n^k \rightarrow \infty$  die Summe in ein Integral über und Gl. (3.34) ändert sich in

$$E(\bar{\tau} \cdot \bar{\tau}(k)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \tau d\tau$$

mit dem Ergebnis:

$$E(\bar{\tau} \cdot \bar{\tau}(k)) = \frac{1}{4} = E(\bar{\tau})E(\bar{\tau}) .$$

Die Werte  $\bar{\tau}$  und  $\bar{\tau}(k)$  sind unkorreliert. Dann gilt

$$E(\bar{\tau}(k)) = kE(\bar{\tau})$$

und die Näherung

$$E\left(\left(\sum_{l=0}^{i-1} H_{\tau}^l(\bar{\tau})\right) H_{\tau}^i(\bar{\tau})\right) = im_{1\bar{\tau}}^2$$

kann verwendet werden. Ist der Verlauf der Varianz effizient zu berechnen, so kann man die Berechnung in einen Abschnitt starker Korrelation mit der Abbruchordnung  $n$

und einen Abschnitt schwacher Korrelation trennen, um den Berechnungsaufwand bei ausreichender Genauigkeit gering zu halten:

$$\sigma_{\bar{\tau}(k)}^2 = km_{2\bar{\tau}} + m_{1\bar{\tau}} \left( -k^2 + 2 \sum_{i=n}^{k-1} i \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{\tau}}(\xi) \left( \sum_{l=0}^{i-1} H_{\bar{\tau}}^l(\xi) \right) H_{\bar{\tau}}^i(\xi) d\xi. \quad (3.36)$$

$\sigma_{\bar{\tau}(k)}^2$  ist bei Abbildungen, bei denen die Korrelation zwischen  $\bar{\tau}$  und  $\bar{\tau}(k)$  verschwindet, geringer als bei Abbildungen, bei denen  $\bar{\tau}$  und  $\bar{\tau}(k)$  stärker korreliert sind.

Das dritte Moment kann durch Reihenentwicklung berechnet werden mit:

$$m_{3\bar{\tau}(k)} = E(\bar{\tau}(k-1)) + 3E(\bar{\tau}^2(k-1)\bar{\tau}(k)) + 3E(\bar{\tau}(k-1)\bar{\tau}^2(k)) + E(\bar{\tau}(k)).$$

Ausrechnen der Reihe liefert das Ergebnis

$$m_{3\bar{\tau}(k)} = km_{3\bar{\tau}} + 3 \sum_{i=1}^{k-1} \left( E(\bar{\tau}^2(i)\bar{\tau}(i+1)) + E(\bar{\tau}(i)\bar{\tau}^2(i+1)) \right)$$

bzw.:

$$m_{3\bar{\tau}(k)} = \sum_{i=1}^k E(\bar{\tau}^2(i)) + 3 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l=i+1}^k \left( E(\bar{\tau}^2(i)\bar{\tau}(l)) + E(\bar{\tau}(i)\bar{\tau}^2(l)) \right) + 6 \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{l=i+1}^{k-1} \sum_{n=l+1}^k E(\bar{\tau}(i)\bar{\tau}(l)\bar{\tau}(n)).$$

Aus dem dritten Moment ist die Schiefe

$$\xi_{\bar{\tau}(k)} = \frac{E((\bar{\tau}(k) - m_{1\bar{\tau}(k)})^3)}{\sigma_{\bar{\tau}(k)}^3}$$

berechenbar.

Die Iterationsvorschrift für das vierte Moment lautet

$$m_{4\bar{\tau}(k)} = E(\bar{\tau}^4(k-1)) + E(\bar{\tau}^4(k)) + 2 \left( E(\bar{\tau}^3(k-1)\bar{\tau}(k)) + E(\bar{\tau}(k-1)\bar{\tau}^3(k)) \right) + 4E(\bar{\tau}^2(k-1)\bar{\tau}^2(k))$$

und die entsprechende Reihenentwicklung ist

$$m_{4\bar{\tau}(k)} = km_{4\bar{\tau}} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \left( E(\bar{\tau}^3(i)\bar{\tau}(i+1)) + E(\bar{\tau}(i)\bar{\tau}^3(i+1)) + 2E(\bar{\tau}^2(i)\bar{\tau}^2(i+1)) \right)$$

bzw.:

$$\begin{aligned} m_{4\bar{\tau}(k)} = & \sum_{i=1}^k E(\bar{\tau}^4) + 4 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l=i+1}^k \left( E(\bar{\tau}^3(i)\bar{\tau}(l)) + E(\bar{\tau}(i)\bar{\tau}^3(l)) \right) + 6 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l=i+1}^k E(\bar{\tau}^2(i)\bar{\tau}^2(l)) \\ & + 12 \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{l=i+1}^{k-1} \sum_{n=l+1}^k \left( E(\bar{\tau}^2(i)\bar{\tau}(l)\bar{\tau}(n)) + E(\bar{\tau}(i)\bar{\tau}^2(l)\bar{\tau}(n)) + E(\bar{\tau}(i)\bar{\tau}(l)\bar{\tau}^2(n)) \right) \\ & + 24 \sum_{i=1}^{k-3} \sum_{l=i+1}^{k-2} \sum_{n=l+1}^{k-1} \sum_{p=n+1}^k E(\bar{\tau}(i)\bar{\tau}(l)\bar{\tau}(n)\bar{\tau}(p)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Der Excess läßt sich aus dem vierten Moment berechnen mit:

$$\epsilon_{\bar{r}(k)} = \frac{E\left((\bar{r}(k) - m_{1\bar{r}(k)})^4\right)}{\sigma_{\bar{r}(k)}^4} - 3.$$

Der Excess gibt die Abweichung der Form der Dichte von einer Gaußverteilung an. Liegt eine Gaußverteilung vor, so hat der Excess den Wert 0. Der Excess einer Gleichverteilung hat den Wert  $-1.2$ . Wie im Abschnitt Autokorrelationsfunktion gezeigt wird, ist das Leistungsdichtespektrum sehr flach, wenn sich die Dichten stark gegenseitig überlappen. Dies ist bei einer Verteilung nahe an der Gleichverteilung der Fall, was sich auch bei den berechneten Spektren bestätigte.

Für  $k = 0$  ist der Excess gleich dem der stationären Dichte. Für  $k \rightarrow \infty$  konvergiert der Excess der Dichten von  $\bar{r}(k)$  für alle chaotischen Abbildungen gegen 0.

### Charakteristische Funktion

Die charakteristische Funktion der zufälligen Veränderlichen  $x$  ist definiert durch

$$\Theta(\omega) = E\left(e^{j\omega x}\right) \quad (3.38)$$

und kann mit

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\xi} f_x(\xi) d\xi \quad (3.39)$$

berechnet werden [WS86].

In [BS] wird eine Methode zur Berechnung des Leistungsdichtespektrums von Impulsprozessen der Form (3.4) mit charakteristischen Funktionen gezeigt. Das Ergebnis ist

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{\sigma_A^2}{E(\bar{\tau})} + \frac{2}{E(\bar{\tau})} \sum_{k=1}^{\infty} c_A(k) \operatorname{Re}(\Theta_k(\omega)), \quad (3.40)$$

wobei

$$\Theta_k(\omega) = \int_0^{\infty} f_{\bar{r}(k)}(v) e^{j\omega v} dv$$

die charakteristische Funktion der Ereigniszeit  $\bar{r}(k)$  ist. Sind die Dichten  $f_{\bar{r}(k)}(v)$  durch eine parametrierbare Funktion gegeben oder approximierbar, läßt sich ein analytischer Ausdruck für das Leistungsdichtespektrum ermitteln.

### Beispiel 1: Rechteckdichte

Alle Ereigniszeiten  $\bar{r}(k)$  seien gleichverteilt mit der Dichte:

$$f_{\bar{r}(k)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b(k)} & \text{für } m_{1\bar{r}(k)} - \frac{b(k)}{2} \leq t \leq m_{1\bar{r}(k)} + \frac{b(k)}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Varianz der Ereigniszeiten ist  $\sigma_{\bar{\tau}(k)}^2 = \frac{b^2(k)}{12}$ . Die Korrelationsfolge für die Impulsflächen sei  $c_A(k) = (-1)^k$ . Die charakteristische Funktion ist dann

$$\Theta_k(\omega) = \frac{2}{\omega b(k)} e^{j\omega m_{1\bar{\tau}(k)}} \sin \omega \frac{b(k)}{2}$$

und das Leistungsdichtespektrum ergibt sich zu:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{E(\bar{\tau})} + \frac{4}{E(\bar{\tau})} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\omega b(k)} \sin\left(\frac{\omega b(k)}{2}\right) \cos(\omega m_{1\bar{\tau}(k)}) . \quad (3.41)$$

In dieser Gleichung stellt der Kosinus-Term eine Welligkeit im Leistungsdichtespektrum mit der Periode  $\frac{2\pi}{m_{1\bar{\tau}(k)}}$  dar. Dem überlagert ist ein Anteil  $\frac{\sin b(k)\omega}{b(k)\omega}$ , der die Welligkeit dämpft. Soll die Welligkeit im Leistungsdichtespektrum stark bedämpft werden, so ist  $b(k)$ , und damit auch die Varianz der Ereigniszeitpunkte, zu maximieren, d.h. die Dichten aufeinanderfolgender Ereigniszeiten sollten sich möglichst stark überlappen.

Gleichung (3.41) kann zur Berechnung des Leistungsdichtespektrums genutzt werden, wenn die Zeitspannen  $\bar{\tau}(k)$  mit Hilfe stückweise linearer Abbildungen generiert werden. Dann kann die Dichte als Summe von Rechteckdichten zusammengesetzt werden, siehe Gl. (3.26)

$$f_{\bar{\tau}(k),i}(t) = \begin{cases} h(k, i) & \text{für } \bar{t}_{\min}(k, i) \leq t \leq \bar{t}_{\max}(k, i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die charakteristische Funktion ist:

$$\Theta_k(\omega) = \sum_{i=1}^{n(k)} \int_{\bar{t}_{\min}(k,i)}^{\bar{t}_{\max}(k,i)} h(k, i) e^{j\omega t} dt .$$

Das Leistungsdichtespektrum ist dann

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{\sigma_A^2}{E(\bar{\tau})} + \frac{4}{E(\bar{\tau})} \sum_{k=1}^{\infty} c_A(k) \sum_{i=1}^{n(k)} \frac{h(k, i)}{\omega b(k, i)} \sin\left(\omega \frac{b(k, i)}{2}\right) \cos(\omega \tilde{t}(k, i)) \quad (3.42)$$

mit  $b(k, i) = \bar{t}_{\max}(k, i) - \bar{t}_{\min}(k, i)$  und  $\tilde{t}(k, i) = \frac{1}{2}(\bar{t}_{\max}(k, i) + \bar{t}_{\min}(k, i))$ . Für stückweise lineare Markovabbildungen werden in [Kru01] Methoden zur Berechnung der Dichten  $f_{\bar{\tau}(k)}(\tau)$  unter Nutzung der symbolischen Dynamik vorgestellt. Zusammen mit (3.42) erhält man eine weitere effiziente Variante zur Berechnung des Leistungsdichtespektrums, die für stückweise lineare Markovabbildungen anwendbar ist.

**Beispiel 2: Gaußverteilung**

Sind die Ereigniszeiten gaußverteilt mit der Dichte

$$f_{\bar{t}(k)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\bar{t}(k)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-\bar{t}(k))^2}{\sigma_{\bar{t}(k)}^2}},$$

so lautet die zugehörige charakteristische Funktion:

$$\Theta_k(\omega) = e^{j\omega m_{1\bar{t}(k)}} e^{-\frac{(\sigma_{\bar{t}(k)}\omega)^2}{2}}.$$

Dann ist das Leistungsdichtespektrum für  $c_A(k) = (-1)^k$  gegeben durch:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{E(\bar{\tau})} + \frac{2}{E(\bar{\tau})} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{(\sigma_{\bar{t}(k)}\omega)^2}{2}} \cos \omega m_{1\bar{t}(k)}. \quad (3.43)$$

Auch hier stellen die einzelnen charakteristischen Funktionen durch  $e^{-\frac{(\sigma_{\bar{t}(k)}\omega)^2}{2}}$  bedämpfte Kosinusschwingungen im Frequenzbereich dar. Aus den beiden letzten Beispielen ist ersichtlich, daß das Leistungsdichtespektrum dann flach ausfällt, wenn  $\sigma_{\bar{t}(k)}^2$  für alle  $k$  maximal wird.

In [BS] wird gezeigt, daß die Dichte  $f_{\bar{t}(k)}(t)$  für große  $k$  gegen die Dichte einer Gaußverteilung konvergiert. Für stückweise lineare Abbildungen kann diese Eigenschaft zur effizienten Berechnung des Leistungsdichtespektrums mit einer Kombination aus Gl. (3.41) und Gl. (3.43) benutzt werden, die für niedrige Ordnung (strenge Korrelation) die stückweise Konstanz der Dichte und für große Ordnung die Konvergenz gegen die Gaußverteilung nutzt.

**Autokorrelationsfunktion**

Die Autokorrelationsfunktion ist die inverse Fouriertransformierte des Leistungsdichtespektrums:

$$s_{vv}(\tau) = \mathfrak{F}_T^{-1}(S_v(\omega)). \quad (3.44)$$

Allgemein entspricht der Wunsch nach minimaler Störung einem weißen Leistungsdichtespektrum. Dann lautet die Autokorrelationsfunktion  $s_{vv}(\tau) = \delta(\tau)$ . In der Realität kann dies nicht erreicht werden, und als Kompromiß ist der Entwickler an einer möglichst schnell abklingenden Autokorrelationsfunktion interessiert. Durch Fourier-Rücktransformation von Gl. (3.40) erhält man für die Autokorrelationsfunktion eines Impulsprozesses:

$$s_{\xi\xi}(\tau) = \frac{\sigma_A^2}{E(\bar{\tau})} \delta(\tau) + \frac{1}{E(\bar{\tau})} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_A(k) f_{\bar{t}(k)}(\tau). \quad (3.45)$$

In Gl. (3.45) werden Dichten negativer Ordnung zur Berechnung der Autokorrelationsfunktion benötigt. Die Prozesse  $\xi(t)$  und  $\tau(k)$  sind stationär. Damit unterliegen alle  $\bar{\tau}(k)$  der stationären Dichte. Für negative  $\tau$  sind alle Dichten  $f_{\bar{\tau}(k)}(\tau)$ ,  $k \geq 1$  Null. Das Gleiche gilt für positive  $\tau$  und negative  $k$ . Damit Gl. (3.45) die Eigenschaft  $s_{\xi\xi}(\tau) = s_{\xi\xi}(-\tau)$  einer Autokorrelationsfunktion besitzt, muß für die Dichten gelten:  $f_{\bar{\tau}(k)}(\tau) = f_{\bar{\tau}(-k)}(-\tau)$ . Dann läßt sich Gl. (3.45) schreiben:

$$s_{\xi\xi}(\tau) = \frac{\sigma_A^2}{E(\bar{\tau})} \delta(\tau) + \frac{1}{E(\bar{\tau})} \sum_{k=1}^{\infty} c_A(k) (f_{\bar{\tau}(k)}(\tau) + f_{\bar{\tau}(k)}(-\tau)) . \quad (3.46)$$

Schränkt man das Zeitintervall, in dem die Autokorrelationsfunktion betrachtet werden soll, auf  $0 < \tau < \infty$  ein vereinfacht sich Gl. (3.46) zu:

$$s_{\xi\xi}(\tau) = \frac{1}{E(\bar{\tau})} \sum_{k=1}^{\infty} c_A(k) f_{\bar{\tau}(k)}(\tau) \quad \text{für } \tau > 0 . \quad (3.47)$$

Die Autokorrelationsfunktion verläuft dann sehr flach, wenn sich die Funktionen  $c_A(k) f_{\bar{\tau}(k)}(\tau)$  gegenseitig kompensieren. Für den technisch interessanten Fall  $c_A(k) = (-1)^k$  lautet die Autokorrelationsfunktion:

$$s_{\xi\xi}(\tau) = \frac{1}{E(\bar{\tau})} \delta(\tau) + \frac{1}{E(\bar{\tau})} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f_{\bar{\tau}(2k)}(\tau) - f_{\bar{\tau}(2k-1)}(\tau)) . \quad (3.48)$$

Bild 3.8 zeigt die mit den Dichten erster bis zwölfter Ordnung approximierte Autokorrelationsfunktion für  $c_A(k) = (-1)^k$  und  $H_{\tau}(\tau) = 2\tau \bmod 1$ . Die Autokorrelationsfunktion wird aufgrund der begrenzten Abbruchordnung im Bereich  $0 \leq \tau \leq 6$  gut approximiert. Außerhalb dieses Intervalls ist die Approximation fehlerhaft. Der Verlauf für  $\tau \geq 6$  entspricht im Wesentlichen dem Verlauf der Dichte höchster verwendeter Ordnung  $f_{\bar{\tau}(12)}(\tau)$ . Durch Erhöhen der Abbruchordnung läßt sich der Bereich, in dem die Autokorrelationsfunktion gut approximiert wird, vergrößern.

Ein flacher Verlauf der Autokorrelationsfunktion wird hier dann erreicht, wenn die Dichten

- sich gegenseitig stark überlappen  $\rightarrow$  Maximierung von  $\sigma_{\bar{\tau}(k)}^2$
- möglichst flach verlaufen  $\rightarrow$  Excess möglichst nahe am Wert  $-1.2$ .

Zur schnellen groben Bewertung des Verlaufs des Leistungsdichtespektrums kann die Entwicklung der beiden Größen  $\sigma_{\bar{\tau}(k)}^2$  und  $\epsilon_{\bar{\tau}(k)}$  über  $k$  genutzt werden.  $\frac{1}{m_{1\bar{\tau}}}$  gibt die

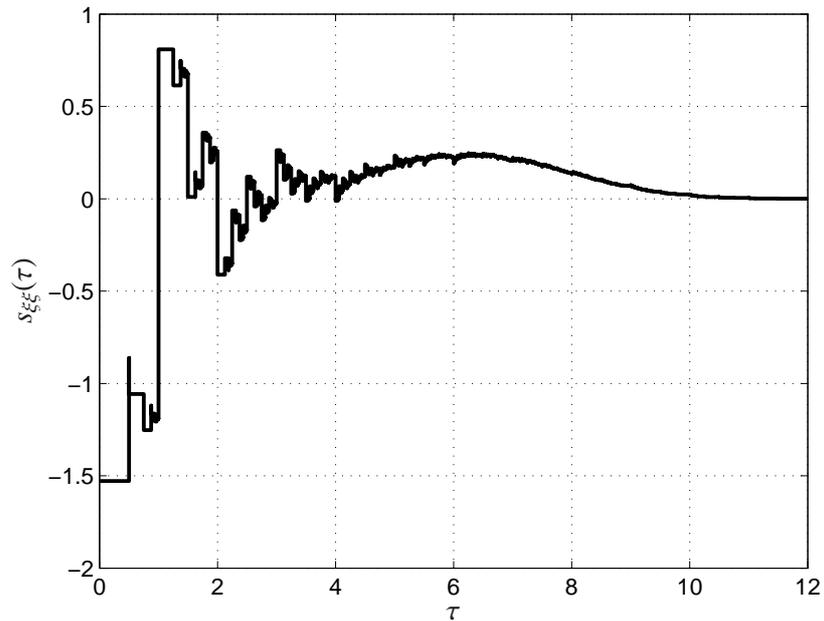


Bild 3.8: Autokorrelationsfunktion approximiert mit den Dichten  $f_{\bar{i}(k)}(\tau)$  erster bis zwölfter Ordnung.

mittlere Zyklusfrequenz des Systems an, in deren Umgebung die maximale Leistungsdichte zu erwarten ist.

Als grobe Kriterien, die nur die Varianz berücksichtigen, kommen

$$J_6 = \min_k \left( \frac{\sigma_{\bar{i}(k)}^2}{f(m_{1\bar{i}(k)})} \right) \quad (3.49)$$

und

$$J_7 = \sum_{i=k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{\sigma_{\bar{i}(i)}^2}{f(m_{1\bar{i}(k)})} \quad (3.50)$$

in Frage, wobei  $f(m_{1\bar{i}(k)})$  eine geeignet zu wählende Funktion des Erwartungswertes von  $\bar{i}(k)$  ist. Eine einfache Funktion ist z.B.  $f(m_{1\bar{i}(k)}) = cm_{1\bar{i}(k)}$  mit der Konstante  $c$ .

### 3.3 Formung des Spektrums durch Modulation

#### 3.3.1 Eingriffsmöglichkeiten in das System

Die Formung des Leistungs(dichte)spektrums durch Modulation ist vor allem bei elektrotechnischen hybriden Systemen interessant, da speziell bei diesen Systemen spektrale Anteile im hörbaren Bereich und/oder bei höheren Frequenzen entstehen, die die Funktion anderer elektronischer Systeme in der Umgebung beeinflussen können. Durch Modulation läßt sich das diskrete Leistungs(dichte)spektrum und damit auch die maximale spektrale Leistung(-sdichte) verändern. Ziel ist stets die Verringerung der maximalen spektralen Leistung(-sdichte). Dazu wird ein Modulationssignal  $w$  in das System eingespeist. Grundsätzlich kann der modulierende Eingriff entweder im kontinuierlichen Teilsystem oder im Ereignisgenerator erfolgen.

#### Eingriff in das kontinuierliche Teilsystem

In Bild 2.1 existiert ein Störeingang  $\mathbf{d}$  in das kontinuierliche Teilsystem. Durch Variation des Störeinganges erreicht man eine Variation der Parameter der Funktion  $\mathbf{f}$  des kontinuierlichen Teilsystems.

#### Beispiel

Ein Aufwärtswandler mit Hysteresesteuerung wird durch Variation der Eingangsspannung moduliert. Die Ausgangskapazität sei groß, so daß die Ausgangsspannung als konstant angesehen werden kann. Der Wandler arbeite im nichtlückenden Betrieb. Dann gilt für den Spulenstrom:

$$\frac{d}{dt}i_L = \begin{cases} \frac{U_e}{L} & \text{für } q = 0 \\ \frac{U_e - U_a}{L} & \text{für } q = 1 \end{cases} .$$

Für den diskreten Zustand gilt:

$$g(q) = \begin{cases} 1 & \text{für } q = 0 \\ 0 & \text{für } q = 1 \end{cases} .$$

Der Ereignisgenerator läßt sich modellieren durch:

$$\phi_0 = i_{\max} - i_L$$

$$\phi_1 = i_L - i_{\min}$$

$$\Phi(\mathbf{x}, q, \mathbf{u}, \tau) = \begin{cases} \phi_0 & \text{für } q = 0 \\ \phi_1 & \text{für } q = 1 \end{cases} .$$

Sind die Umschaltsschwellen  $i_{\max}$  und  $i_{\min}$  konstant, so ist die Schaltfrequenz direkt proportional zu  $U_e$ . Die Veränderung von  $U_e$  entspricht einer Frequenzmodulation und kann somit zur Beeinflussung des Spektrums genutzt werden. Nachteilig ist jedoch, daß dieser Eingang der leistungsseitige Eingang des Systems ist. Ein Stellglied, das  $U_e$  verändert, wird mit dem Eingangsstrom  $I_e$  des Wandlers belastet. Soll das Stellglied selbst ein kontinuierliches System sein, so wird in diesem eine zu  $I_e$  proportionale Leistung umgesetzt.

Eine andere Möglichkeit zur Modulation bestünde in der Veränderung von  $L$ . Dies kann z.B. durch Vormagnetisierung des Kerns nach Bild 3.9 bei Verwendung geeigneter Kernmaterialien geschehen. Allerdings entsteht realisierungsbedingt in der gesteu-

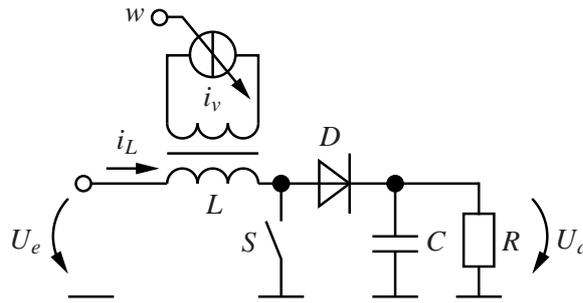


Bild 3.9: Veränderung der Induktivität durch Vormagnetisierung des Kerns.

erten Stromquelle  $i_v$  eine Verlustleistung, die proportional zu  $u_L$  ist.

Wie aus dem Beispiel ersichtlich ist, erfordert der modulierende Eingriff in das kontinuierliche Teilsystem oft große Stelleistungen. Die Bereitstellung der erforderlichen Stelleistung führt zur Verringerung des Wirkungsgrades des Gesamtsystems, da diese mit einer Verlustleistung verbunden ist. Weiterhin ist die Realisierung der entsprechenden Stellglieder wegen der Anforderungen an deren Ausgangsleistung teuer. Deshalb findet diese Variante des modulierenden Eingriffes keine Anwendung und ist hier nur der Vollständigkeit wegen aufgeführt.

**Eingriff in den Ereignisgenerator**

Ein Eingriff in den Ereignisgenerator ist leicht durch die Variation der Parameter der Ereignisfunktionen  $\phi_i$  möglich. Bild 3.10 zeigt das so modifizierte hybride System. Der Generator erzeugt ein Modulationssignal, das in den Ereignisgenerator eingespeist

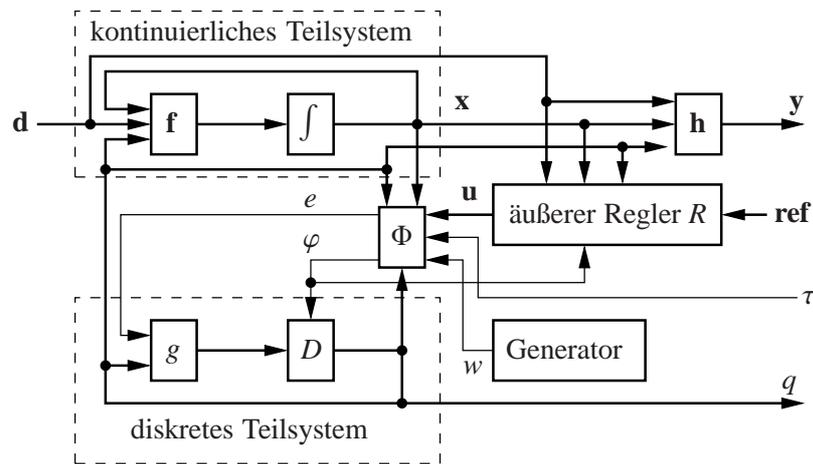


Bild 3.10: Hybrides System mit Modulation der Ereignisse.

wird. Die Modulation erfolgt durch den Ereignisgenerator.

Dieser Eingriff wird in diesem Abschnitt verfolgt. Die einfachste Möglichkeit zur Variation der Parameter der Ereignisfunktionen besteht in der additiven Überlagerung des Reglerausgangssignals  $\mathbf{u}$  mit dem Modulationssignal  $w$ .

In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Varianten des modulierenden Eingriffes in den Ereignisgenerator gezeigt und auftretende Wechselwirkungen mit der äußeren Regelung diskutiert.

**3.3.2 Steuerschemata**

**Zeitsteuerung**

Bei Zeitsteuerung hängt die Funktion des Ereignisgenerators nicht von  $\bar{\mathbf{x}}$  ab. Dann ändert sich Gl. (2.5) in:

$$\Phi(\bar{q}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\tau}) = 0 .$$

Bei dieser Betriebsart arbeitet der Ereignisgenerator als reiner Wert-Zeit-Umsetzer (value-to-time converter, VTC). Ein allgemeines System zur Wert-Zeit Umsetzung ist

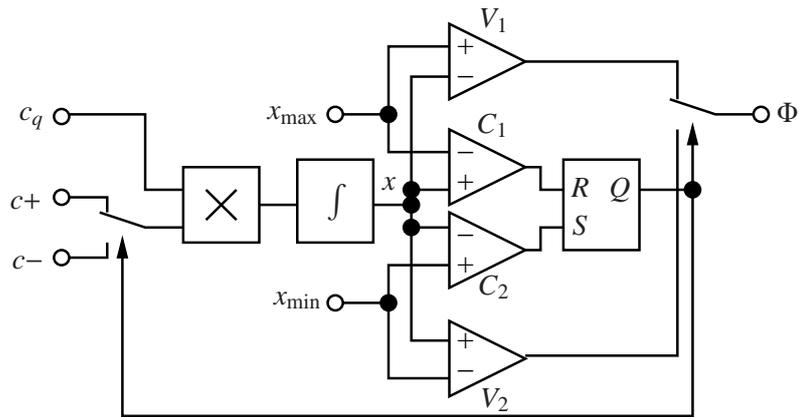


Bild 3.11: Realisierung des Ereignisgenerators für Zeitsteuerung.

in Bild 3.11 dargestellt. Ein Anstiegssignal  $c_q$  wird für  $Q = 1$  mit dem positiven  $c+$  und für  $Q = 0$  mit dem negativen Anstieg  $c-$  multipliziert und integriert. Das Ausgangssignal  $x$  des Integrators wird durch die Komparatoren  $C_1$  und  $C_2$  mit einem oberen Schwellwert  $x_{\max}$  und einem unteren Schwellwert  $x_{\min}$  verglichen. Erreicht  $x$  den oberen Schwellwert, so wird  $Q$  auf 0 gesetzt. Erreicht  $x$  den unteren Schwellwert, so wird  $Q$  auf 1 gesetzt.  $V_1$  und  $V_2$  sind lineare Verstärker mit der Verstärkung  $v$ . Das Ausgangssignal dieses Ereignisgenerators ist:

$$\Phi = \begin{cases} v(x_{\max} - x) & \text{für } Q = 1 \\ v(x - x_{\min}) & \text{für } Q = 0 \end{cases} .$$

Dieser Ereignisgenerator ist selbst ein hybrides System, da eine Wert-Zeitintervallumsetzung immer nach Abschluß der Umsetzung neu initialisiert werden muß. Damit ergibt sich die Notwendigkeit der Generierung von Ereignissen.

Der Ereignisgenerator aus Bild 3.11 läßt sich durch Zerlegen in einzelne Teilsysteme in das Modell in Bild 2.1 einordnen. Multiplizierer, Schalter und Integrator gehören zum kontinuierlichen Teilsystem, das durch diese Zuordnung um eine Zustandsvariable erweitert wurde. Das RS-Flip-Flop gehört zum diskreten Teilsystem. Die Komparatoren und Verstärker gehören zum Ereignisgenerator. Läßt sich der andere Teil des diskreten Teilsystems auch durch ein digitales Signal triggern, können die beiden Verstärker weggelassen werden und die Zeitsteuerung vereinfacht sich zur Struktur nach Bild 3.12. Dann kann ebenfalls auf den sonst notwendigen Komparator

in  $D$  (Bild 2.1) verzichtet werden.

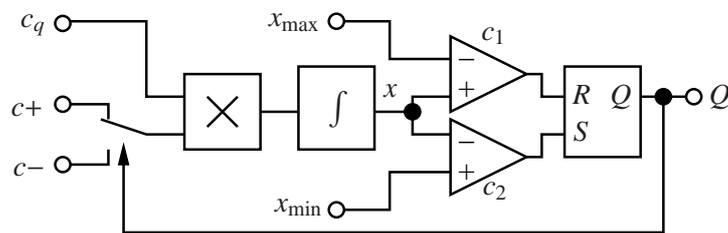


Bild 3.12: Einfacher Wert-Zeit-Umsetzer bei Verwendung eines flankengetriggerten diskreten Teilsystems.

Zur Modulation der Aktivierungsdauern kann der Eingang  $c_q$  oder die beiden Eingänge  $x_{\min}$  und  $x_{\max}$  genutzt werden. Wird das diskrete Teilsystem in Bild 2.1 durch eine Flanke von  $Q$  getaktet, so gilt für die Dauer des Betriebsmodus mit den Bezeichnungen in Bild 3.12:

$$(c_+ - c_-) \int_0^{\bar{\tau}(k)} c_q(t) dt = x_{\max}(\bar{\tau}(k)) - x_{\min} .$$

Zur Generierung der aufeinanderfolgenden Zeitintervalle kann entweder  $c_q$  oder  $x_{\max} - x_{\min}$  oder beides variiert werden. Bezüglich des Eingangs  $c_q$  wirkt das System mittelnd, bezüglich  $x_{\max} - x_{\min}$  nicht. Wird ein Regler mit gemittelten Modellen entworfen, so ist wegen des mittelnden Verhaltens bei Verwendung des Eingangs  $c_q$  eine bessere Übereinstimmung des Systemverhaltens mit dem des gemittelten Modells zu erwarten als bei Verwendung der Differenz  $x_{\max} - x_{\min}$  zur Generierung der Zeitintervalle. Die Überlagerung des Modulationssignals kann entweder additiv mit dem Reglersignal oder am jeweils anderen Eingang des VTC erfolgen.

### Beispiele

- Pulsweitenmodulation

Bei Pulsweitenmodulation ist die Zyklusdauer  $\tau_m$  konstant. Der Regler stellt die anteiligen Aktivierungsdauern (Tastverhältnisse)  $\frac{\tau_1}{\tau_m} \dots \frac{\tau_{k_m-1}}{\tau_m}$ . Hier kommt ein Ereignisgenerator gemäß Bild 3.13 zum Einsatz.

Zur Modulation kann zum einen der Eingang  $\frac{1}{\tau_m}$  dienen. Dann beeinflusst die Modulation nur die Zyklusdauer und nicht die vom Regler gestellten anteiligen Dauern.

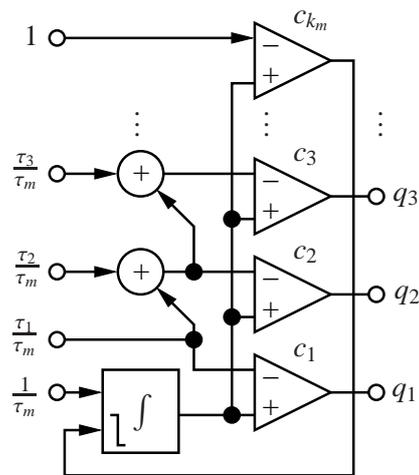


Bild 3.13: Wert-Zeit-Umsetzer zur anteiligen Generierung der Zeitintervalle.

Zum anderen kann die Modulation dadurch erfolgen, daß einer oder mehrerer anteiliger Dauern das Modulationssignal überlagert wird.

- Pulsfrequenzmodulation

Bei Pulsfrequenzmodulation beeinflusst der Regler die Aktivierungsdauern  $\tau_1 \dots \tau_{k_m}$  und damit auch die Zyklusdauer  $k_m$ . Pulsfrequenzmodulation entspricht der Wert-Zeit-Umsetzung nach Bild 3.14. Bei dieser Variante kann die Modulation durch Anlegen

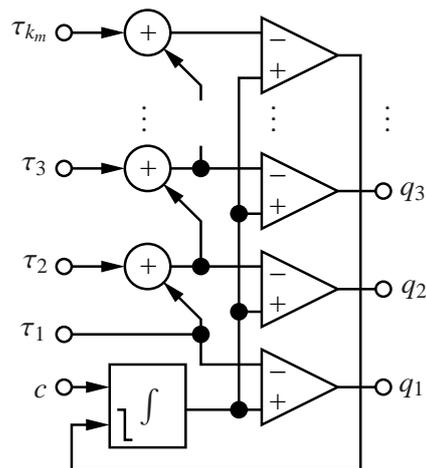


Bild 3.14: Wert-Zeit-Umsetzer für Pulsfrequenzmodulation.

des Signals an den Eingang  $c$  oder durch Überlagerung einer oder mehrerer Aktivie-

rungsdauern mit dem Modulationssignal erfolgen. Da die Zyklusdauer hier vom Ausgangssignal des Reglers abhängt, beeinflusst dieser in jedem Fall die zu modulierende Größe.

### **Ereignissteuerung**

Bei Ereignissteuerung ist die Funktion des Ereignisgenerators von  $\bar{\tau}$  unabhängig. Gleichung (2.5) ändert sich in:

$$\Phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{u}}) = 0 .$$

Der Ereignisgenerator läßt sich um eine Modulation erweitern, wenn er um einen weiteren Eingang  $w$  erweitert wird, der die Parameter der einzelnen Schaltflächen  $\phi_i$  beeinflusst. Wie bei der Zeitsteuerung kann dies durch Variation einer einzelnen Schaltfläche oder durch gleichzeitige Variation mehrerer Schaltflächen erfolgen. Durch gleichzeitige Variation mehrerer Schaltflächen besteht die Möglichkeit, mit der Modulation die Welligkeit einer oder mehrerer Zustandsgrößen zu beeinflussen, ohne den Mittelwert der letzteren zu verändern.

### **Beispiel**

Eine für eindimensionale Systeme typische Form der Ereignissteuerung ist die Hysteresesteuerung. Zur Modulation kann die obere Umschaltswelle oder die untere Umschaltswelle einzeln oder die Hysteresebreite variiert werden. Der Eingriff des Reglers kann entweder die Variation einer einzelnen Schaltschwelle oder die Verschiebung beider Schwellen, so daß sich dabei der Mittelwert ändert, sein. Ein regelnder Eingriff in die Hysterese ist nicht sinnvoll, da hierbei nicht der zu regelnde Mittelwert beeinflusst wird. Vielmehr macht eine gleichzeitige Verschiebung beider Schwellen Sinn, da hierdurch nur der zu regelnde Mittelwert beeinflusst wird. Erfolgt dann die Modulation in Form einer reinen Veränderung der Hysteresebreite, so ist die Wechselwirkung zwischen Regelung und Modulation minimiert.

### **Gemischte Zeit-Ereignissteuerung**

Bei gemischter Zeit-Ereignissteuerung bleibt Gl. (2.5) unverändert. Zur Modulation können sowohl zeitliche als auch ereignisabhängige Parameter des Generators verändert werden.

## Beispiele

- CPM

Eine häufig verwendete gemischte Zeit-Ereignissteuerung für hybride Systeme der Leistungselektronik ist der Current Programmed Mode. Das Prinzip wurde bereits in Bild 2.6 dargestellt. Ein Zustandswechsel erfolgt bei Erreichen einer Umschalt-schwelle  $i_{ref}$ , der andere erfolgt nach Ablauf einer vorgegebenen Aktivierungsdauer. Bei dieser Variante der Steuerung erfolgt der Eingriff des Reglers durch Variation der Schaltschwelle  $i_{ref}$ . Der Eingriff der Modulation kann entweder durch Überlagerung von  $i_{ref}$  mit dem Modulationssignal  $w$  oder durch Variation der vorgegebenen Akti- vierungsdauer erfolgen. In beiden Fällen führt die Modulation zu einer Variation des Mittelwertes, so daß Modulation und Regelung nicht unabhängig voneinander wirken.

- CPM mit Stabilisierungsrampe

In praktischen Realisierungen wird zur Unterdrückung von chaotischem Verhalten oft eine Stabilisierungsrampe verwendet [Eri97]. Der Verlauf des Spulenstroms bei Ver- wendung dieses Prinzips ist in Bild 3.15 dargestellt. Durch das Einführen der Sta-

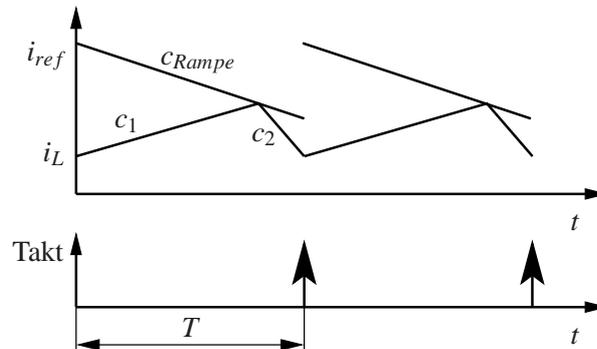


Bild 3.15: Zeitverlauf des Spulenstroms bei CPM mit Stabilisierungsrampe.

bilisierungsrampe erhält auch das Ereignis "Ausschalten" eine Zeitabhängigkeit. Der Eingriff der Regelung erfolgt weiterhin durch Verschiebung der jetzt zeitabhängigen Umschalt-schwelle. Zur Modulation kann neben den beiden vorher besprochenen Va- rianten noch der Anstieg der Stabilisierungsrampe verwendet werden.

### Wechselwirkung mit der Regelung

Aus den gezeigten Beispielen ist ersichtlich, daß Wechselwirkungen zwischen der Regelung und der Modulation auftreten können. Dies wird am Beispiel in Abschnitt 3.3.1 folgendermaßen deutlich: Die mittlere Eingangsleistung  $P_{ein} = \frac{1}{2}U_e(i_{max} + i_{min})$  ist bei ideal arbeitendem System identisch mit der mittleren Ausgangsleistung  $P_{aus} = U_a I_a$ . Daraus ergibt sich die Ausgangsspannung zu  $U_a = U_e \frac{i_{max} + i_{min}}{2I_a}$ . Wird durch Variation der Umschaltsschwellen  $U_a$  moduliert, so würde der Regler die Ausgangsspannung durch Veränderung der Umschaltsschwellen  $i_{max}$  und  $i_{min}$  korrigieren und somit auch auf das Spektrum rückwirken. Für die Anwendung ist diese Wechselwirkung unerwünscht, da:

- durch die Modulation die Regelgröße verändert wird und möglicherweise außerhalb der Spezifikation gerät.
- die Stellgröße durch den Regler wegen der Modulation unnötig stark variiert wird, was in der Regel mit erhöhten Leistungsverlusten verbunden ist.
- die Regelung der Modulation entgegen wirkt, so daß die erreichbaren Verbesserungen im Leistungsdichtespektrum gegenüber einem ähnlichen System ohne Wechselwirkung geringer ausfallen.

Wegen dieser Probleme ist die Suche nach einem zur wechselwirkungsarmen bzw. -freien Modulation geeigneten Steuerschema vor dem Beginn der Suche nach einer geeigneten Modulationsart lohnend. Im nächsten Abschnitt werden Beispiele für wechselwirkungsarme bzw. -freie Steuerschemata vorgestellt.

Es gibt allerdings Steuerschemata, wo diese Wechselwirkung nicht zu vermeiden ist. Ihre Berücksichtigung ist im allgemeinen Fall recht aufwendig. Eine Möglichkeit liegt darin, den äußeren Regler als Bestandteil des kontinuierlichen Teilsystems zu modellieren, wie in Abschnitt 2.4 gezeigt wurde.

### Beispiele für geeignete Steuerschemata zur Entkopplung der Modulation von der Regelung

Die folgenden zwei Beispiele wechselwirkungsfreier Steuerschemata gelten für Systeme, deren kontinuierlicher Zustand in Näherung für jeden diskreten Zustand zeitlich

linear verläuft.

### Zeitsteuerung

Hat ein System für jeden diskreten Zustand  $i$  einen konstanten Anstieg  $c_i$  des kontinuierlichen Zustands, so ist die mittlere Ableitung des Zustands

$$\dot{x}_{m,\tau_m} = \frac{1}{\tau_m} \sum_{i=1}^{k_m} c_i \tau_i = \sum_{i=1}^{k_m} c_i D_i, \quad (3.51)$$

wobei  $D_i = \frac{\tau_i}{\tau_m}$  die anteilige Aktivierungsdauer des Modus  $q = i$  ist. Aus Gl. (3.51) ist sofort ersichtlich, daß die mittlere Ableitung des kontinuierlichen Zustands nur von den anteiligen Aktivierungsdauern abhängt und von  $\tau_m$  unabhängig ist. Ein Ereignisgenerator, bei dem  $u$  nur die anteiligen Aktivierungsdauern modifiziert und die Modulation  $w$  nur  $\tau_m$  variiert, entkoppelt daher bei stückweise linearen Zeitverläufen die Modulation von der Regelung. Dann können der Entwurf des Reglers und der Entwurf einer geeigneten Modulation vollständig getrennt voneinander erfolgen. Dieses Steuerschema wird durch den Wert-Zeit Umsetzer aus Bild 3.13 realisiert.

### Ereignissteuerung

Ersetzt man in Gl. (3.51) die Aktivierungsdauern durch

$$\tau_i = \frac{x_{H,i} - x_{L,i}}{c_i}, \quad (3.52)$$

so ist die gemittelte Ableitung des Signals:

$$\dot{x}_{m,\tau_m} = \frac{\sum_{i=1}^{k_m} (x_{H,i} - x_{L,i})}{\sum_{i=1}^{k_m} \frac{x_{H,i} - x_{L,i}}{c_i}}. \quad (3.53)$$

Multipliziert man in Gl. (3.53) Nenner und Zähler mit einem beliebigen Faktor  $w$ , so bleibt die mittlere Ableitung konstant. Daraus ist ersichtlich, daß bei einer Skalierung aller Schaltschwellen mit dem selben Wert sich der Mittelwert nicht ändert. Da nach Gl. (3.52) die Aktivierungsdauern linear von der Skalierung abhängen, kann die Variable  $w$  zur Modulation genutzt werden, ohne den Mittelwert der Regelgröße zu verändern. Eine Realisierung für ein solches System mit zwei diskreten Zuständen ist in Bild 3.16 dargestellt.  $x$  ist der Eingang für den kontinuierlichen Zustand und  $Q$  der diskrete Zustand. Die Regelung kann durch Variation des Eingangs  $x_{m,\tau_m}$  erfolgen. Der Modulationseingang ist  $w$ . Dieser Generator wurde an einem DC-DC-Wandler erfolgreich getestet und in [KMS04b] veröffentlicht.

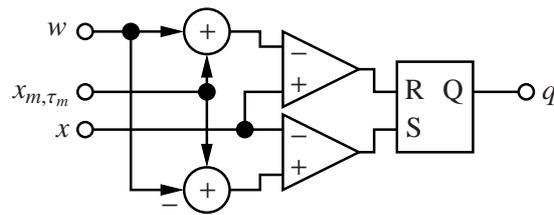


Bild 3.16: Hysteresesteuerung mit Entkopplung von Regelung und Modulation.

### 3.3.3 Modulationsarten und Realisierungen der entsprechenden Generatoren

In diesem Abschnitt wird die Realisierung der Generatoren zur Generierung des Modulationssignals behandelt. In einigen Spezialfällen kann der Ereignisgenerator und die Generierung der Modulationswerte in einem einzigen Block zu einer einfachen Schaltung zusammengefaßt werden. Dieser Fall wird ebenfalls betrachtet.

#### Periodische Modulation

Zur Generierung von periodischen Modulationssignalen eignen sich alle Varianten von Funktionsgeneratoren. Viele davon (z.B. Rechteckgenerator) sind hybride Systeme. Ein einfacher Generator für das Modulationssignal ist der Dreiecksgenerator. Nutzt man in Bild 3.12 das Signal  $x$  als Ausgang, so erhält man ein Dreieckssignal. Ist die Modulationsfrequenz deutlich niedriger als die Schaltfrequenz des Systems, so zeigt [CRS03b] für Frequenzmodulation, daß der Verlauf der Einhüllenden des Leistungs(dichte)spektrums in der Umgebung der mittleren Zyklusfrequenz identisch mit dem der stationären Dichte des Modulationssignals ist. Beim Dreieckssignal sind die Modulationswerte gleichverteilt, so daß sich mit der Näherung aus [CRS03b] eine rechteckförmige Einhüllende des Leistungsspektrums ergeben würde. Für niedrige Modulationsfrequenzen ist daher die Modulation mit einem Dreieckssignal eine effiziente Methode zur Verringerung der maximalen spektralen Leistung.

Bei höheren Modulationsfrequenzen ist eine Vorverzerrung des Signals nötig. Zur Generierung eines universellen parametrierbaren Modulationssignals ist der Signalgenerator nach Bild 3.17 geeignet. Die Realisierung ist ein Arbitrary Waveform Generator. In Abschnitt 3.4.1 wird die Ermittlung geeigneter Modulationssequenzen für

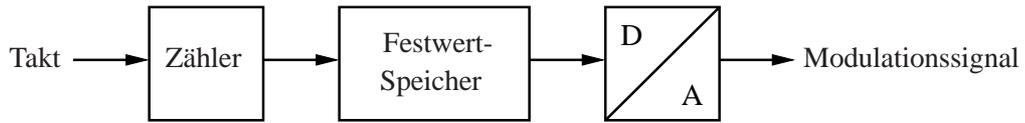


Bild 3.17: Generator für universelle Modulationssignale.

diesen Generator behandelt.

### Chaotische Modulation

Ein chaotisches Signal erzeugt im Gegensatz zu periodischen Signalen ein kontinuierliches Leistungsdichtespektrum. Deshalb ist ein Chaosgenerator ebenfalls zur Erzeugung des Modulationssignals geeignet. Eine Methode zur Erzeugung eines chaotischen Signals ist die Iteration einer nichtlinearen Abbildung, Bild 3.18. Der Generator be-

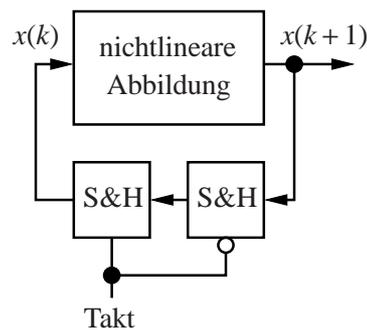


Bild 3.18: Iteration einer nichtlinearen Abbildung.

steht aus der Abbildung und zwei Abtast-Haltestufen. Durch die angegebene Beschaltung der Abtast-Haltestufen gibt die iterierte Abbildung zu jeder steigenden Taktflanke einen neuen Wert  $w$  aus:

$$w(k+1) = H_w(w(k)) .$$

Dieser wird als Modulationssignal verwendet. Der Takt kann entweder ein extern generierter Takt oder bei Zeitsteuerung das Ausgangssignal des Wert-Zeit-Umsetzers sein. Bei Ereignissteuerung eignet sich der diskrete Zustand  $q$  zur Generierung des Taktsignals für den Chaosgenerator.

In der Literatur sind einige Vorschläge zur schaltungstechnischen Realisierung von

nichtlinearen Abbildungen zu finden [Kil91][PvJ01][MPRS04]. Hier wird eine Methode zur Implementation beliebiger eindimensionaler stückweise linearer Abbildungen vorgestellt. Die Methode benutzt Schaltungen in Stromtechnik, da diese mit sehr wenigen Bauelementen auskommen. Zur Realisierung genügen die Blöcke aus Tab. 3.2: Die Addition/Subtraktion von Signalen erfolgt an einem Knoten. Die Verstärkung/Verteilung eines Signals erfolgt mit einem Stromspiegel oder einer Strombank. In der Darstellung kennzeichnen die senkrechten Pfeile die Stromflußrichtung. Der waagerechte Pfeil weist vom Eingang des Stromspiegels/der Strombank zum Ausgang. Die Zahlen an den senkrechten Pfeilen kennzeichnen das Spiegelverhältnis. Für die in Tab. 3.2 dargestellte Strombank gilt  $i_1 = \nu i_{ein}$  und  $i_2 = 2i_{ein}$ . Ist im Schaltbild nichts vermerkt, so gilt ein Spiegelverhältnis von 1 : 1. Der Vergleichler ist ebenfalls mit einem Stromspiegel realisiert. Das Ausgangssignal des Vergleichlers ist die Spannung  $u_>$ . Für  $i_1 < i_2$  ist der Stromspiegel/die Stromquelle nach  $U_{SS}$  in der Begrenzung und es gilt  $u_> = U_{SS}$ . Für  $i_1 > i_2$  ist der Stromspiegel/die Stromquelle nach  $U_{DD}$  in der Begrenzung und es gilt  $u_> = U_{DD}$ . Als Schalter wird ein Transferrate verwendet, dessen Eingangssignal die Spannung  $u_>$  ist. Da das Ausgangssignal des Vergleichlers ausschließlich zum Steuern des Schalters benutzt wird, sind keine zusätzlichen Maßnahmen zur Spannungs-Strom-Wandlung erforderlich. Zur Realisierung der Abbildungen wird weiterhin noch eine Referenz benötigt. Diese ist eine Stromquelle. Da die Referenzstromquelle in der Realisierung deutlich aufwendiger als alle anderen Blöcke ist, ist die Anzahl der benötigten Referenzwerte zur Realisierung einer Abbildung zu minimieren. Zu beachten ist, daß bis auf den Summationsknoten und das Transferrate alle dargestellten Blöcke nur unipolare Signale verarbeiten können. Bei negativen Eingangssignalen liefern diese einen Ausgangsstrom von null. Die geschickte Ausnutzung dieser Eigenschaft kann dazu beitragen, den Schaltungsaufwand zu minimieren, wie ein Beispiel zeigen wird. Zum Entwurf der Abbildung wird diese im ersten Schritt mit den zur Verfügung stehenden Blöcken in Form eines Blockschaltbildes entworfen. Danach erfolgt direkt mit Tab. 3.2 die Übersetzung des Blockschaltbildes in eine Schaltung.

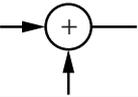
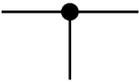
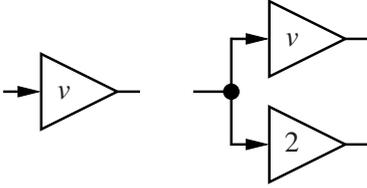
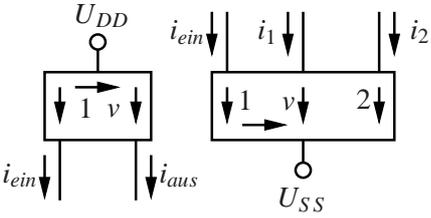
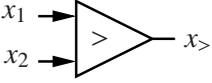
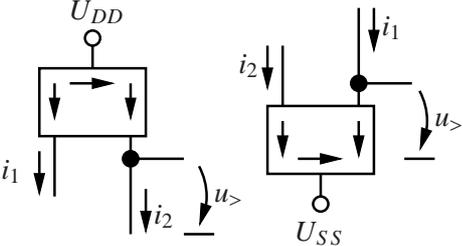
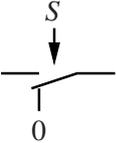
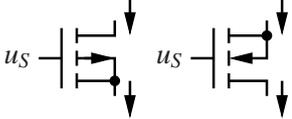
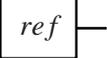
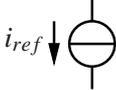
Block	Schaltelement
Addition/Subtraktion 	Knoten 
Verstärker mit einem/mehreren Ausgängen 	Stromspiegel/Strombank 
Vergleicher 	Stromspiegel 
Einschalter 	FET 
Referenzwert 	Stromquelle 

Tabelle 3.2: Blöcke und Schaltungen in Stromtechnik zur Realisierung eindimensionaler stückweise linearer Abbildungen.

**Beispiel 1: Abbildung  $y = 2x \bmod 1$  für  $0 \leq x \leq 1$**

Die Abbildung lässt sich schreiben als:

$$y = \begin{cases} 2x & \text{für } 2x < 1 \\ 2x - 1 & \text{für } 2x \geq 1 \end{cases}$$

Die direkte Umsetzung dieser Gleichung in das Blockschaltbild ist in Bild 3.19 links dargestellt. Die Übersetzung liefert die Schaltung nach Bild 3.19 rechts. Für  $0 \leq i_{ein} \leq$

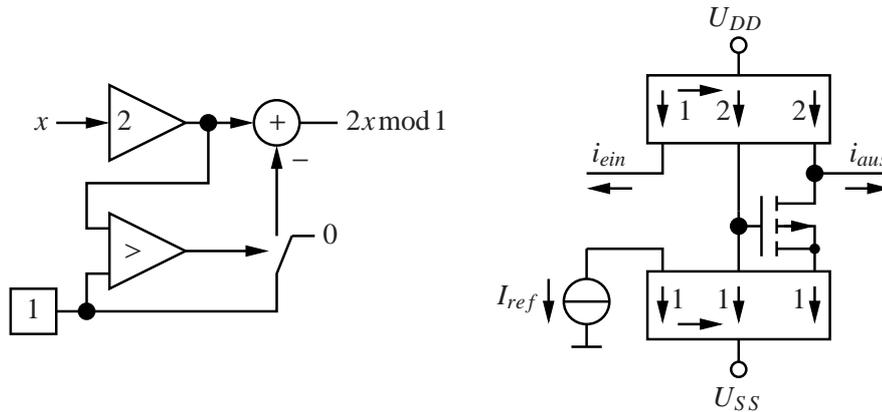


Bild 3.19: Realisierung der Bernoulliabbildung für  $0 \leq x \leq 1$ .

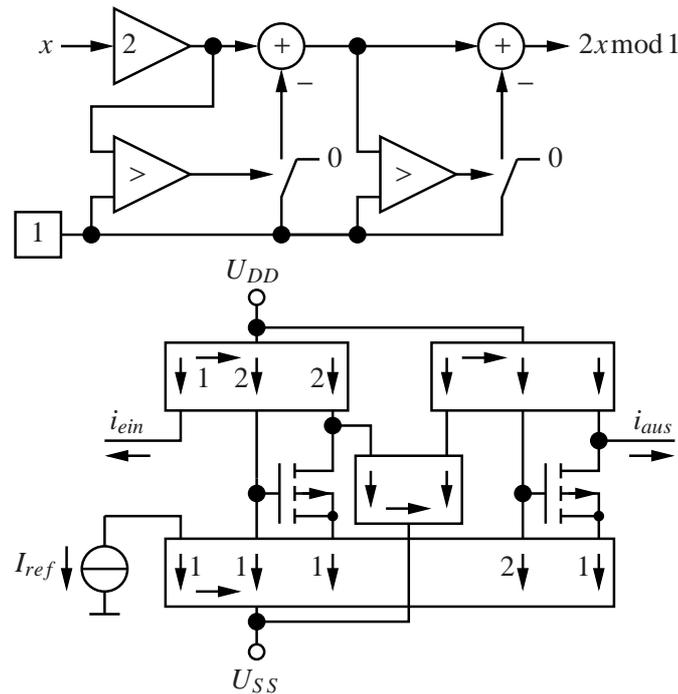
$I_{ref}$  realisiert diese Schaltung die mit  $I_{ref}$  skalierte Bernoulliabbildung. Zur Realisierung dieser Abbildung werden 7 FETs und eine Stromquelle benötigt.

**Beispiel 2: Abbildung  $y = 2x \bmod 1$  für  $0 \leq x \leq 1.5$**

Diese Abbildung hat zwei Unstetigkeitsstellen. Die Realisierung hat deshalb zwei Vergleichler und Schalter. Eine erste Variante lässt sich schreiben

$$y = \begin{cases} 2x & \text{für } 2x < 1 \\ 2x - 1 & \text{für } 2x \geq 1 | 2x - 1 < 1 \\ 2x - 2 & \text{für } 2x - 1 \geq 1 \end{cases}$$

und ist in Bild 3.20 oben dargestellt. Die zunächst im Blockschaltbild einfach aussehende Variante mit zwei Summiergliedern resultiert in einer recht aufwendigen Schaltung (Bild 3.20 unten), da für jeden Summationsknoten ein Stromspiegelausgang nötig ist. Die Realisierung der Schaltung benötigt 15 FETs und eine Stromquelle und funktioniert für  $0 \leq i_{ein} \leq 1.5I_{ref}$ . Das Umschreiben der Umschaltbedingungen führt auf die

Bild 3.20: Realisierung der Bernoulliabbildung für  $0 \leq x \leq 1.5$ .

mathematisch identische Formel:

$$y = \begin{cases} 2x & \text{für } 2x < 1 \\ 2x - 1 & \text{für } 1 \leq 2x < 2 \\ 2x - 2 & \text{für } 2x \geq 2 \end{cases} .$$

Da hier stets der Vergleich der Größe  $2x$  mit Schwellwerten erfolgt, kann gegenüber der ersten Variante ein Summierglied eingespart werden. Bild 3.21 zeigt das Blockschaltbild. Da sowohl das Verteilen eines Signals als auch die Verstärkung mit Stromspiegeln/Strombänken erfolgen muß, erfordert der zusätzliche Verstärker im Blockschaltbild keinen zusätzlichen Schaltungsaufwand. Die daraus resultierende Schaltung in Bild 3.21 unten benötigt nur noch 11 FETs und eine Stromquelle.

### Beispiel 3: Zeltabbildung

Die Zeltabbildung

$$y = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 4\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

läßt sich durch das Blockschaltbild in Bild 3.22 links realisieren. Dabei kann ausgenutzt werden, daß der Vergleich mit dem Wert 0 erfolgt und somit der gesteuerte

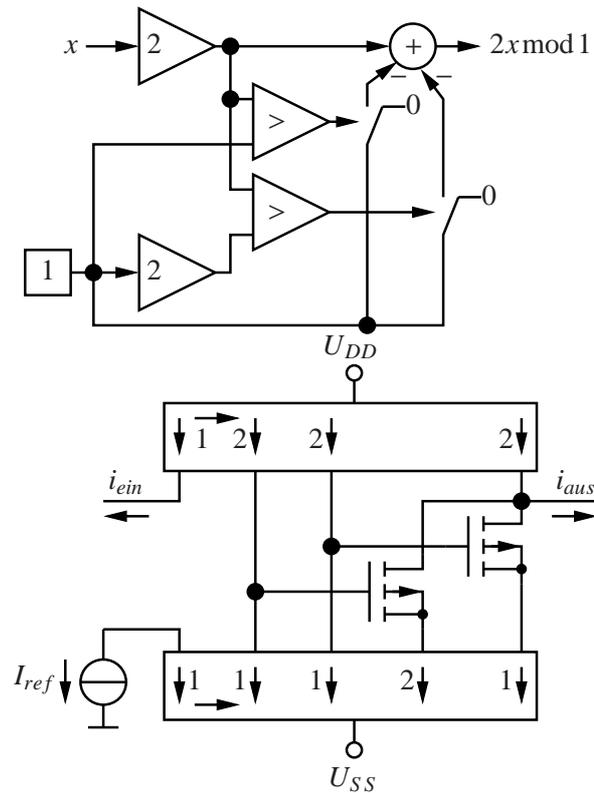


Bild 3.21: Realisierung der Bernoulliabbildung für  $0 \leq x \leq 1.5$ , Variante 2.

Schalter als Einweggleichrichter funktioniert. Da der Stromspiegel diese Gleichrichtung selbst vornimmt, können Vergleiche und Schalter in der Schaltung eingespart werden. Die resultierende Schaltung ist in Bild 3.22 rechts dargestellt und benötigt nur 5 FETs und eine Stromquelle. Für  $0 \leq i_{ein} \leq 2I_{ref}$  realisiert diese Schaltung die mit  $I_{ref}$  skalierte Zeltabbildung. In [Kru01] wurde ein Chaosgenerator mit dieser Schaltung für eine Taktfrequenz von 500 kHz entworfen und zur chaotischen Taktung einer Ladungspumpe verwendet. Die Ergebnisse sind in [GKSB01] veröffentlicht.

### Weitere Schaltungen für nichtlineare Abbildungen

Ist die Taktfrequenz sehr niedrig, so kann auch alternativ zur gezeigten Methodik die Sättigung eines Bipolartransistors ausgenutzt werden, wenn die zu realisierende Abbildung keine Unstetigkeiten aufweist. Dies ist z.B. bei der Zeltabbildung der Fall. Bild 3.23 zeigt die Schaltungsrealisierung in Bipolartechnik.  $T_1$  arbeitet im aktiven Bereich als invertierender und im Übersteuerungsbereich als nichtinvertierender

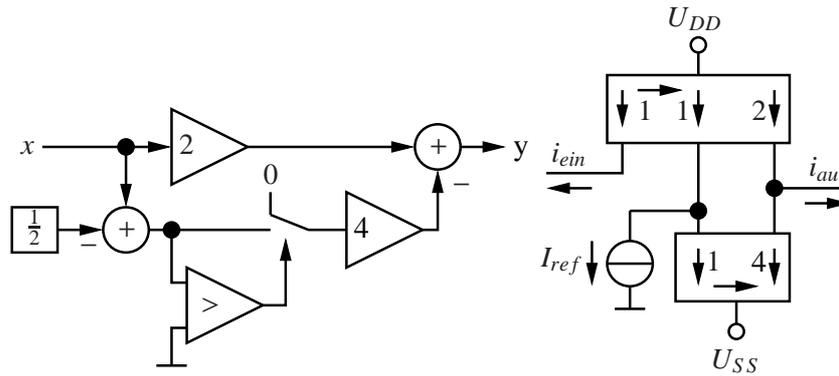


Bild 3.22: Realisierung der Zeltabbildung.

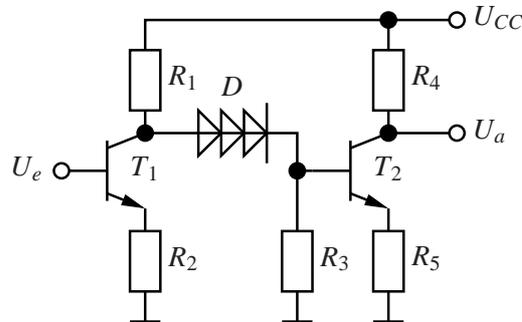


Bild 3.23: Realisierung der Zeltabbildung mit Bipolartransistoren.

Verstärker mit  $|v| = 1$ . Für die Kollektorspannung von  $T_1$  gilt:

$$U_{C1} = \begin{cases} U_{CC} & \text{für } U_e < U_{BEF} \\ U_{CC} - U_e + U_{BEF} & \text{für } U_{BEF} \leq U_e < \frac{1}{2}(U_{CC} + U_{BEF} + U_{BCF}) \\ U_e - U_{BCF} & \text{für } U_e \geq \frac{1}{2}(U_{CC} + U_{BEF} + U_{BCF}) \end{cases} .$$

Die Diode  $D$  dient zusammen mit  $R_3$  zur Pegelverschiebung für die zweite Stufe. Die zweite Stufe dient zur Verstärkung des Signals mit dem Verstärkungsfaktor zwei. Die Ausgangsspannung beträgt:

$$U_a = \begin{cases} -U_{CC} + 2(U_{BEF} + 3U_F) & \text{für } U_e < U_{BEF} \\ -U_{CC} + 2(U_e + 3U_F) & \text{für } U_{BEF} \leq U_e < \frac{1}{2}(U_{CC} + U_{BEF} + U_{BCF}) \\ U_{CC} - 2U_e + 2(U_{BEF} + U_{BCF} + 3U_F) & \text{für } U_e \geq \frac{1}{2}(U_{CC} + U_{BEF} + U_{BCF}) \end{cases} .$$

Für  $U_e \geq U_{BEF}$  realisiert diese Schaltung die Zeltabbildung.

### Dimensionierung der Schaltungen

Die vorgestellte Methode zur Realisierung nichtlinearer Abbildungen gibt durch die Spiegelverhältnisse und die Wahl des Referenzstroms die grundsätzliche Dimensionierung vor. Damit die Realisierung auch tatsächlich eine Folge chaotischer Werte liefert, sind weitere Bedingungen zu beachten, die durch Parameterschwankungen und durch die Unipolarität der Signale in den Signalverarbeitungsblöcken an den Grenzen des Definitionsbereiches entstehen.

- Durch die Unipolarität der Signale entstehen Abschnitte mit konstantem Ausgangswert. Diese können zu stabilen Fixpunkten der Abbildung oder ihrer Iterierten führen. Führt diese Begrenzung zu einem solchen Fixpunkt, so verharrt das System nach endlicher Anzahl von Iterationen in dem Fixpunkt. Deshalb ist der Entwurf auf Fixpunkte zu prüfen und gegebenenfalls zu modifizieren.
- Durch Parameterschwankungen können Werte innerhalb des Definitionsbereiches auf Werte außerhalb des Definitionsbereiches abgebildet werden. Tritt dies auf, so kann der Ausgabewert auf einem durch Wertebegrenzung entstandenen konstanten Abschnitt oder auf einem Abschnitt, in dem sich der Ausgabewert weiter vom Definitionsbereich entfernt, liegen. Im ersten Fall würde das System periodisches Verhalten zeigen. Im zweiten Fall würde das System aus dem Definitionsbereich herauslaufen und außerhalb diesem zur Ruhe kommen. Beide Fälle sind unerwünscht. Daher ist bei der Dimensionierung der Schaltung darauf zu achten, daß der Wertebereich der Abbildung auch bei vorhandenen Parameterschwankungen innerhalb des Definitionsbereiches bleibt.

### Beispiel: Bernoulliabbildung

Die Transferkennlinie der Schaltungsrealisierung nach Bild 3.19 ist in Bild 3.24 dargestellt. Für  $i_e \leq 0$  ist durch die Unipolarität der Werteverarbeitung der Ausgangswert Null. Dann entsteht an der Stelle 0 ein semistabiler Fixpunkt. Um zu vermeiden, daß das System auf diesem Fixpunkt verharrt, ist der Ausgangswert  $i_a(i_e = 0)$  auf einen Wert größer Null zu erhöhen, so daß der semistabile Fixpunkt verschwindet.

Für  $i_e > I_{ref}$  entfernt sich der Ausgabewert stets vom Definitionsbereich, so daß dieser nie mehr erreicht wird, wenn er einmal in dieser Richtung verlassen wurde.

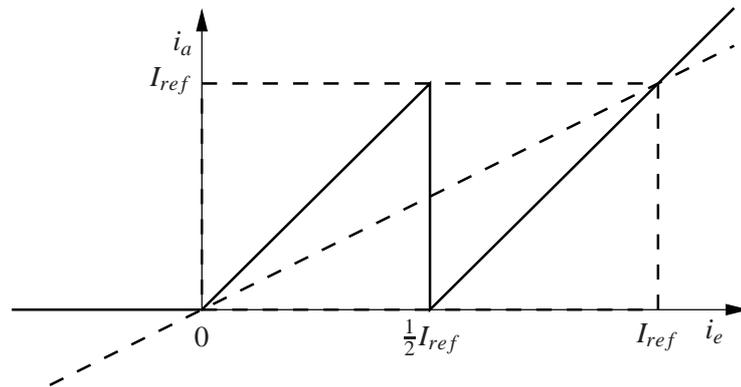


Bild 3.24: Transferkennlinie der Schaltung nach Bild 3.19.

Bei Parameterschwankungen kann die Überschreitung des Definitionsbereiches an der Stelle  $i_e = \frac{1}{2}i_{ref} - \epsilon$  und an der Stelle  $i_e = i_{ref} - \epsilon$  auftreten. Um zu sichern, daß der Definitionsbereich nicht verlassen wird, müssen die Anstiege stets niedriger als zwei sein. Weiterhin kann bei Parameterschwankungen der Ausgabewert  $i_a(i_e = \frac{1}{2}i_{ref} + \epsilon)$

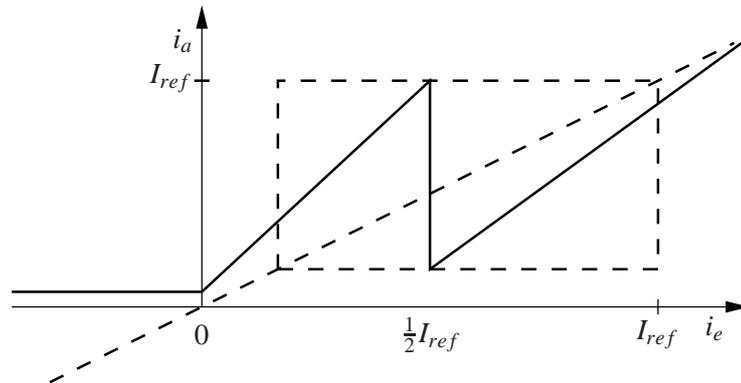


Bild 3.25: Modifizierte Transferkennlinie.

kleiner als Null sein. Deshalb ist der zugehörige Ausgabewert zu erhöhen. Die entsprechend modifizierte Transferkennlinie ist in Bild 3.25 dargestellt. Sie enthält keine semistabilen oder stabilen Fixpunkte mehr und der Definitionsbereich wird auf ein Intervall abgebildet, das innerhalb des Definitionsbereiches liegt. Der Bereich, in dem die Abbildung stationär iteriert, ist gestrichelt dargestellt.

### Chaotischer Taktgenerator

In diesem Abschnitt wird ein einfaches System vorgestellt, das einen chaotischen Takt

mit einstellbarer minimaler und maximaler Taktdauer bereitstellt. Zu diesem System wurde ein Patent erteilt, [KMS04d]. Das Funktionsprinzip ist in Bild 3.26 dargestellt.

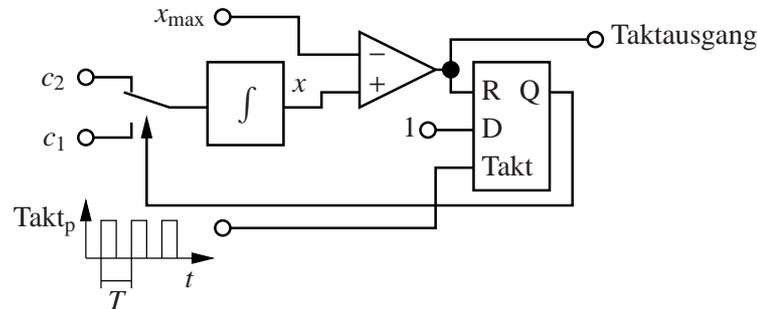


Bild 3.26: Einfacher chaotischer Taktgenerator.

Der Taktausgang wird nach jedem Umlauf eines Zyklusses aktiviert, wenn der kontinuierliche Zustand den Wert  $x_{\max}$  erreicht. Die Dauer des Ausgangstaktes ist identisch mit der Zyklusdauer des Taktgenerators.

Der Generator benötigt ein rücksetzbares Master-Slave-Flip-Flop. Die Eingänge  $c_1$  und  $x_{\max}$  erhalten konstante positive Werte. An  $c_2$  liegt ein negativer konstanter Wert. Führt der Ausgang Q des Flip-Flops Low-Signal, so legt der Schalter den negativen Wert  $c_2$  auf den Eingang des Integrators und das Signal  $x$  sinkt zeitlich linear bis zum Eintreffen der nächsten steigenden Taktflanke von  $Takt_p$ .  $Takt_p$  ist ein periodisches extern generiertes Rechtecksignal. Mit dem Eintreffen der steigenden Taktflanke schaltet Q auf 1 und der Schalter legt den Eingang  $c_1$  an den Eingang des Integrators. Das Signal  $x$  steigt zeitlich linear, bis es den Wert  $x_{\max}$  erreicht. Dann wird das Flip-Flop wieder zurückgesetzt. Am Taktausgang entsteht eine Folge von Nadelimpulsen, die bei Bedarf mit Hilfe eines asynchronen Teilers in ein Rechtecksignal umgewandelt werden kann. Die Abbildung aufeinanderfolgender Zyklusdauern ist:

$$\tau(m + 1) = T \left( 1 - \frac{c_2}{c_1} \right) - \tau(m) \left| \frac{c_2}{c_1} \right| \bmod \left( T \left( 1 - \frac{c_2}{c_1} \right) \right).$$

Für  $\left| \frac{c_2}{c_1} \right| > 1$  ist die Dauer aufeinanderfolgender Zyklen chaotisch. Die Dauer variiert zwischen 0 und  $T \left( 1 - \frac{c_2}{c_1} \right)$ .

Probleme in der Anwendung bereitet die Tatsache, daß die minimale Intervalldauer Null ist. Getaktete Systeme benötigen eine minimale Intervalldauer, da aufgrund

von Nichtidealitäten der Bauelemente in der Realisierung die Umschaltdauer von einem zum nächsten diskreten Zustand größer als Null ist. Die Nichtidealitäten führen zu der Forderung nach Einhaltung einer minimalen Aktivierungsdauer. Andererseits führen Forderungen nach geringer Welligkeit des kontinuierlichen Zustands oder Forderungen an eine bestimmte Reaktionszeit bei digitalen getakteten Schaltungen zu der Notwendigkeit der Einhaltung einer maximalen Aktivierungsdauer.

Eine wichtige Eigenschaft eines nichtperiodischen Taktgenerators ist daher die Einstellbarkeit der minimalen und maximalen Aktivierungsdauer. Im folgenden werden Möglichkeiten zur Realisierung der Einstellbarkeit beider Größen vorgestellt, die in [KMS04d] patentiert wurden.

- Aussetzen von  $n$  Takten

Die minimale Taktdauer kann durch das Aussetzen von  $n$  Takten in diskreten Schritten eingestellt werden. Durch das Einfügen von  $n$  zusätzlichen Flip-Flops bleibt der

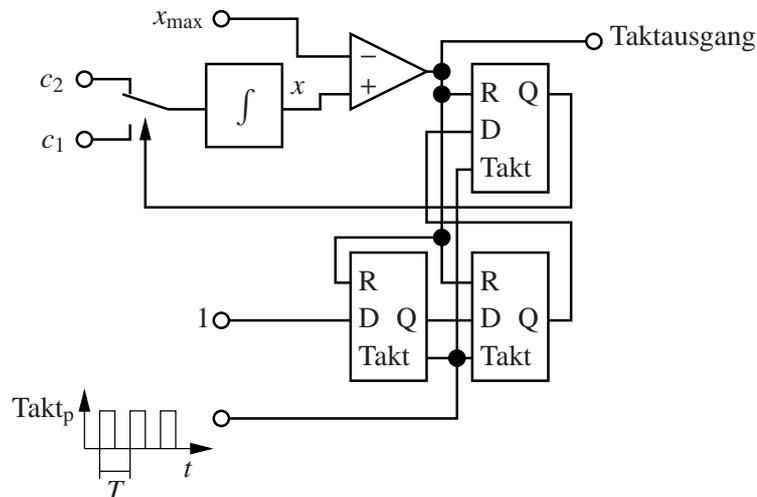


Bild 3.27: Aussetzen von zwei Takten.

D-Eingang des den Schalter steuernden Flip-Flops nach dem Rücksetzen für  $n$  Takte Null. Mit dem  $n + 1$ ten Takt wird das Flip-Flop wieder gesetzt. Die Abbildung aufeinanderfolgender Zyklusdauern ist:

$$\tau(m+1) = T(n+1) \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) - \tau(m) \left\lfloor \frac{c_2}{c_1} \right\rfloor \bmod \left( T \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) \right).$$

Die generierte Zyklusdauer liegt bei  $nT \leq \tau_m \leq (n+1)T$ . Ist die minimale und maximale Intervalldauer vorgegeben, so kann der Taktgenerator durch Festlegen von  $n$  und  $T$  entsprechend konfiguriert werden.

- Begrenzung der minimalen Taktdauer durch Monoflop

Bild 3.28 stellt das Funktionsprinzip dar. Gleichzeitig mit dem Rücksetzen des Flip-

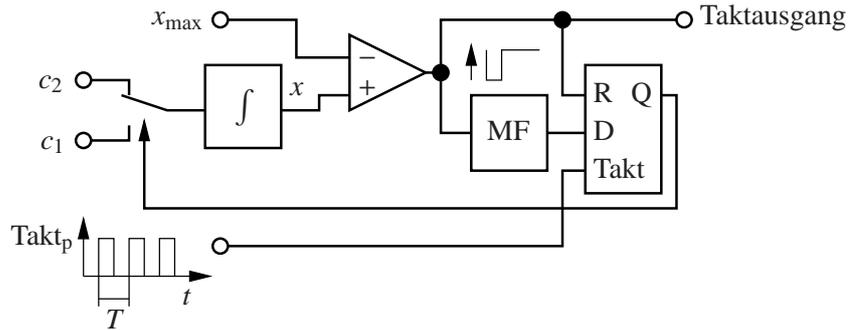


Bild 3.28: Aussetzen von Takten mit Monoflop.

Flops wird ein Monoflop ausgelöst. Dieses sorgt dafür, daß der D-Eingang des Flip-Flops für die Dauer  $\tau_{\min}$  Null bleibt und danach wieder eins wird. Dadurch kann keine Taktflanke, die innerhalb dieser Zeitspanne eintrifft, das Flip-Flop setzen. Die Abbildung aufeinanderfolgender Zyklusdauern lautet:

$$\tau(m+1) = \begin{cases} T \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) - \tau(m) \left| \frac{c_2}{c_1} \right| \bmod \left( T \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) \right) & \text{für} \\ \text{für } \tau(m) \left| \frac{c_2}{c_1} \right| \bmod \left( T \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) \right) \geq \tau_{\min} \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) & \\ \left( T + \tau_{\min} \right) \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) - \tau(m) \left| \frac{c_2}{c_1} \right| \bmod \left( T \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.54)$$

Für die Zyklusdauer gilt  $\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) \tau_{\min} \leq \tau_m \leq \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) (T + \tau_{\min})$ . Auch hier läßt sich durch geeignete Dimensionierung von  $\tau_{\min}$  und  $T$  der Taktgenerator an gegebene Forderungen bezüglich einer minimalen und maximalen Taktdauer anpassen.

- Begrenzung der minimalen Zyklusdauer durch zusätzliche Umschaltswelle

Eine weitere Möglichkeit zur Einstellung der minimalen Zyklusdauer ist das Einführen einer zusätzlichen Schaltschwelle nach Bild 3.29. Nach dem Rücksetzen des Flip-Flops bleibt der D-Eingang solange Null, bis  $x$  eine vorgegebene Schwelle  $x_{\min}$  unterschreitet. Für aufeinanderfolgende Zyklusdauern gilt Gl. (3.54) mit  $\tau_{\min} = -\frac{x_{\max} - x_{\min}}{c_2}$ .

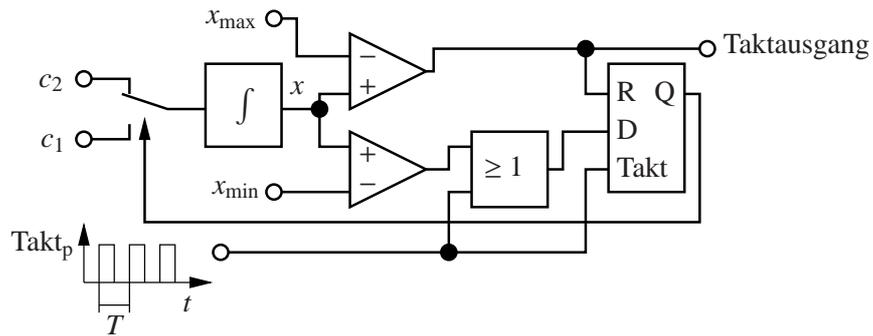


Bild 3.29: Sperren von Takten mit einer zusätzlichen Schaltschwelle.

### Modulation mit Zufallssignalen

Als Zufallssignal kann das Rauschen eines pn-Übergangs oder das Temperaturrauschen eines Widerstandes angesehen werden. Wenige Realisierungen nutzen diese Rauschsignale und geben diese verstärkt auf einen VTC. [bel64] nutzt das verstärkte Rauschsignal einer Zenerdiode, um damit einen gesteuerten Oszillator zu modulieren. [JG00] nutzt das verstärkte Rauschen eines Widerstandes dazu. In den meisten Fällen werden jedoch Pseudo-Zufallsgeneratoren verwendet. Diese basieren auf Chaosgeneratoren[CRS02][SVP95][ThCHS00][Sta93]. Dazu kann auch ein Chaosgenerator nach Bild 3.18 verwendet werden. Dabei wird die Tatsache genutzt, daß die Korrelation zwischen zwei Werten mit steigender Anzahl von Iterationen zwischen ihnen abnimmt. Nutzt man das Ausgangssignal des Generators nur alle  $n$  Iterationen, so kann das Signal bei großem Wert  $n$  als unkorreliertes Zufallssignal angesehen werden. Häufig werden auch digitale Realisierungen von Chaosgeneratoren verwendet [Boc00][Rus93][Cah91]. Für die Realisierung der analogen getakteten Varianten gelten die Aussagen aus dem vorherigen Abschnitt.

Diese Arbeit konzentriert sich auf die periodische und chaotische Modulation. Die Generation von Zufallsfolgen bzw. Pseudo-Zufallsfolgen ist hier nur wegen der Vollständigkeit erwähnt. Für die Behandlung von Zufallsgeneratoren bzw. Pseudo-Zufallsgeneratoren wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

### 3.4 Applikationen

Dieser Abschnitt behandelt die Anwendung verschiedener Varianten der Modulation. Die Ergebnisse werden anhand der verschiedenen in Abschnitt 3.2 vorgestellten Kriterien verglichen. Zur Vereinfachung wird davon ausgegangen, daß keine Wechselwirkung zwischen Modulation und Regelung besteht, d.h. entweder wurde ein geeignetes Steuerschema zur Entkopplung gefunden oder die Modulation ist schnell im Vergleich zum Verhalten des Reglers. Diese Näherung ist bei vielen in der Praxis eingesetzten Systemen erfüllt. Ist das Ziel der Entwurf eines EMI-armen Taktgenerators zur Ansteuerung getakteter Systeme, so reicht zur Bewertung des Modulationssignals in Bezug auf dessen EMV-Performance die Bewertung des Leistungsspektrums oder Leistungsdichtespektrums des Taktsignals. Soll ein System so parametrisiert werden, daß ein bestimmtes Signal auf minimale Auskopplung von Störungen zu optimieren ist, so ist das Leistungsspektrum oder das Leistungsdichtespektrum des entsprechenden Signals zu bestimmen. Beide Größen werden in den nachfolgenden Applikationen benutzt.

#### 3.4.1 periodische Modulation

##### Modulation mit Dreiecksignal

Ein frequenzmoduliertes sinusförmiges Signal beschreibt [Mäu88] mit

$$x(t) = \hat{x} \operatorname{Re} \left( e^{j(\omega_0 t + \eta(t) + \phi_0)} \right),$$

wobei

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t u(\tau) d\tau$$

der Modulationswinkel ist. Für den Fall der langsamen Modulation des sinusförmigen Trägers zeigt [CRS03b], daß das Leistungsdichtespektrum des Taktsignals um die mittlere Zyklusfrequenz die gleiche Form wie die stationäre Dichte des Eingangssignals des entsprechenden FM-Modulators hat:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\Delta\omega} f_x \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right). \quad (3.55)$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit einfachen Mitteln auf das Leistungsdichtespektrum um die Vielfachen der mittleren Zyklusfrequenz erweitern: Ersetzt man den ursprünglich

sinusförmigen Träger durch ein anderes periodisches Signal, so kann dieses durch die Fourierreihe

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i e^{j(i\omega_0 t + \phi_i)}$$

nachgebildet werden. Dann kann man das frequenzmodulierte Signal wie folgt schreiben:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i e^{j(i(\omega_0 t + \eta(t)) + \phi_i)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i e^{j i \eta(t)} e^{j(i\omega_0 t + \phi_i)}. \quad (3.56)$$

Damit erhält man die Näherung:

$$S_x(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i\Delta\omega} f_x\left(\frac{\omega - i\omega_0}{i\Delta\omega}\right).$$

In einem Frequenzbereich, wo sich die Teilspektren gegenseitig nicht überlappen, gilt in der Umgebung von  $i\omega_0$ :

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2i\Delta\omega} f_x\left(\frac{\omega - i\omega_0}{i\Delta\omega}\right). \quad (3.57)$$

Aus Gl. (3.57) ist ersichtlich, daß die Breite des Intervalls, in dem das Leistungsdichtespektrum verschieden von Null ist, linear mit dem Vielfachen  $i$  der mittleren Zyklusfrequenz steigt. Bei periodischer Modulation kann für den Fall der langsamen Modulation ein ähnlicher Ausdruck für die Einhüllende des Leistungsspektrums gefunden werden. Die folgenden Untersuchungen konzentrieren sich auf das Leistungsspektrum um die mittlere Zyklusfrequenz.

Primäres Ziel der Modulation ist die Minimierung der maximalen spektralen Leistung. Ist die Gesamtleistung konstant, so wird die maximale spektrale Leistung minimal, wenn die Einhüllende des Leistungsspektrums bei vorgegebener Modulationsbandbreite um die Vielfachen der mittleren Zyklusfrequenz rechteckförmig verläuft. Aus Gl. (3.55) geht hervor, daß für langsame Modulation FM-Modulationssequenzen mit gleichverteiltem Signalwert diese Form des Leistungs(dichte)spektrums erzeugen.

Das Dreieckssignal ist ein solches Modulationssignal und scheint daher zur Minimierung der maximalen spektralen Leistung besonders geeignet. Bild 3.30 zeigt das gefilterte Leistungsdichtespektrum des Taktsignals um die mittlere Taktfrequenz bei Verwendung eines Dreieckssignals zur Frequenzmodulation für  $\frac{\bar{f}}{f_{mod}} = 1000, 100$  und  $10$ . Die Filterbandbreite beträgt 300Hz. Dabei ist die Vollinie stets das berechnete Leistungsdichtespektrum und die gestrichelte Linie das Leistungsdichtespektrum nach

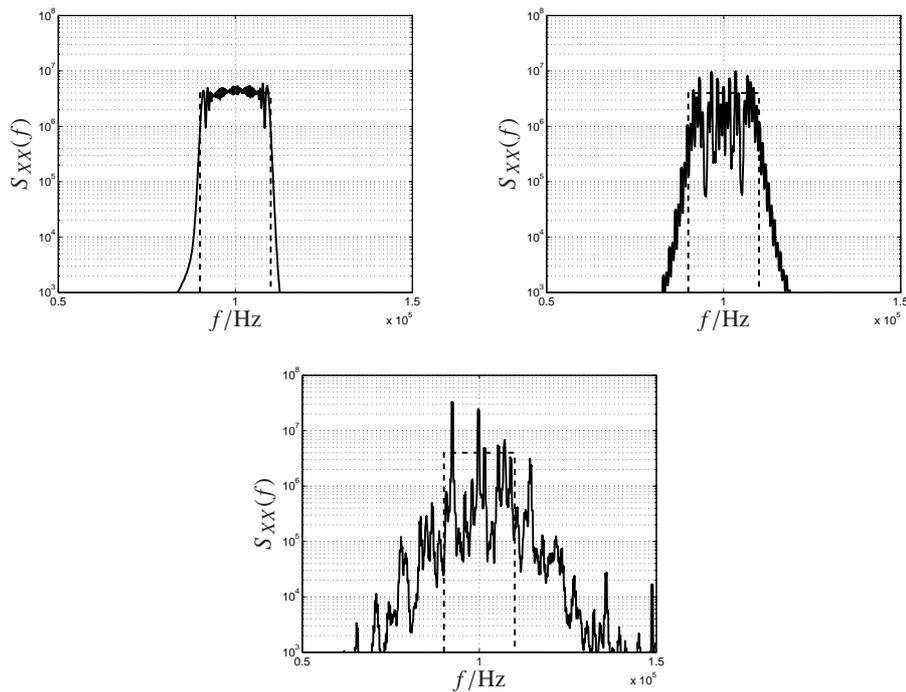


Bild 3.30: Gefiltertes Leistungsdichtespektrum des Taktsignals bei Modulation mit Dreiecksignal,  $\frac{f}{f_{mod}} = 1000, 100, 10$ .

Gl. (3.55). Deutlich ist zu erkennen, daß die Näherung Gl. (3.55) für den ersten Fall zutrifft und mit steigender Modulationsfrequenz deutliche Abweichungen vom tatsächlichen Verlauf des Leistungsdichtespektrums verursacht. Mit zunehmender Modulationsfrequenz nimmt nicht nur die Abweichung, sondern auch die maximale spektrale Leistungsdichte des Signals zu. Für den Fall der Gleichverteilung des Modulationssignals gibt die Näherung Gl. (3.57) das günstigste erreichbare Leistungsdichtespektrum an.

Die Frequenzmodulation mit Dreiecksignal erzielt für sehr niedrige Modulationsfrequenz sehr gute Ergebnisse in der Verringerung der spektralen Leistung. Bei niedriger Modulationsfrequenz ist zu berücksichtigen, daß die PLL eines Systems auf das modulierte Signal einrasten kann. Bei der Taktgenerierung für Computer ist dies gefordert, da z.B. der Prozessortakt mit einer PLL aus dem externen Takt gewonnen wird. Dort findet die Modulation mit dem Dreiecksignal ihr Haupteinsatzgebiet [Cyp] [HFB94] [HFB97] [HB96].

Kann die langsame Modulation nicht verwendet werden, oder werden wegen EMV-Anforderungen bezüglich der Grenzkurve spezielle Anforderungen gestellt, so ist ein anderes Modulationssignal zu verwenden. Die folgenden Abschnitte behandeln die Bestimmung angepaßter periodischer Modulationssignale und zeigen die Verwendung der in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Gütefunktionale und die so erreichten Ergebnisse an Beispielen. Dazu wird der Generator aus Bild 3.17 verwendet. Dieser gestattet die Erzeugung einer beliebigen Modulationssequenz durch das vorherige Ablegen der Wertefolge im Speicher. Viele Systeme besitzen eine digitale Signalverarbeitung, so daß die Implementation dieses Generators einen nur unwesentlichen Aufwand darstellt.

### Potenzfunktion

Die Modulationssignalfolge wird mit mit einer Potenzfunktion so generiert, daß eine periodische Folge der Länge  $N$  mit parametrierbarer stationärer Dichte entsteht. Dazu wird die Funktion

$$w(n) = \begin{cases} w_{\min} + a\left(\frac{n}{N}\right)^\alpha & 0 < n \leq \frac{1}{4}N \\ w_{\max} - a\left|\frac{1}{2} - \frac{n}{N}\right|^\alpha & \frac{1}{4}N < n \leq \frac{3}{4}N \\ w_{\min} + a\left(1 - \frac{n}{N}\right)^\alpha & \frac{3}{4}N < n \leq N \end{cases} \quad (3.58)$$

benutzt. Das Signal soll an den Übergängen stetig sein. Daraus ergibt sich die Bedingung:

$$a = \frac{w_{\max} - w_{\min}}{2} 4^\alpha . \quad (3.59)$$

$\alpha$  ist der Optimierungsparameter. Mit Hilfe dieses symmetrischen Signals ist eine Optimierung des Verlaufes des Leistungsspektrums bei vorgegebenem Modulationsindex möglich. Die Optimierung erfolgt vorzugsweise mit dem Ziel einer rechteckförmigen Einhüllenden des Leistungsspektrums. Bild 3.31 zeigt den Verlauf des Modulationssignals für verschiedene Werte von  $\alpha$ . Der optimale Parameter  $\alpha$  läßt sich durch Minimalwertsuche der in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Gütefunktionale ermitteln. Dies wird im nachfolgenden Beispiel gezeigt. Eine Möglichkeit der Suche nach einem optimalen Parametersatz besteht in der Rasterung des Parameterraums.

Soll ein Parametersatz bestehend aus  $I$  Parametern mit jeweils  $L$  Punkten gerastert werden, so sind dazu  $L^I$  Berechnungen notwendig. Bei einer größeren Parameteranzahl

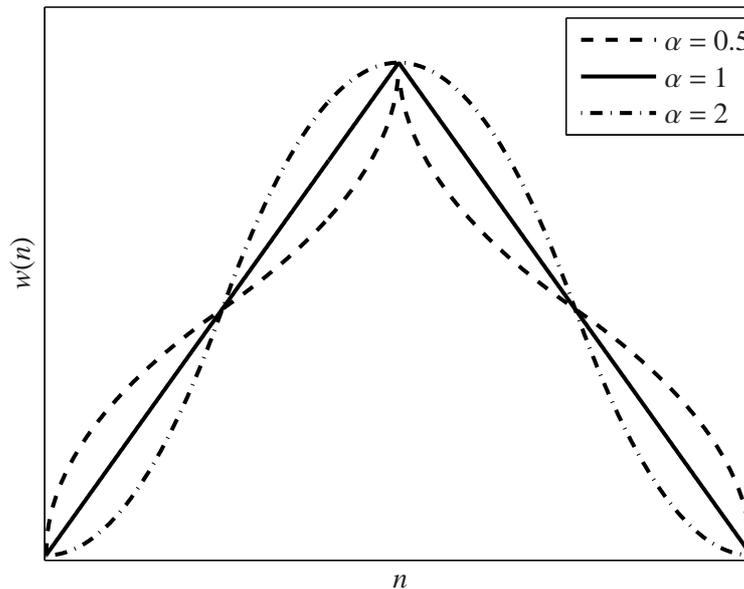


Bild 3.31: Verlauf des Modulationssignals nach Gl. (3.58).

steigt dann die notwendige Rechenzeit schnell auf nicht akzeptable Werte an. Dies ist in den späteren Beispielen der Fall.

Deshalb wurde für die Optimierung ein Algorithmus verwendet, der dem Newton-Verfahren sehr ähnelt. Zunächst wird für einen vorgegebenen Parametersatz das Gütefunktional  $J_i$  berechnet. Anschließend werden alle Parameter bis auf einen konstant gehalten. Ein Parameter wird über den gesamten Parameterbereich variiert, bis das globale Minimum bezüglich dieses Parameters gefunden wurde. Dies geschieht sequenziell für jeden einzelnen Parameter, um die Rechenzeit bei großer Anzahl von Parametern gering zu halten. Nach einer vorgegebenen Anzahl von Umläufen über die einzelnen Parameter erfolgt die Suche nach dem nächstliegenden lokalen Minimum mit verringerter Schrittweite. Wurde ein Minimum gefunden, so wird zur Suche der genauen Lage des Minimums die Schrittweite bis zu einem vorgegebenen Minimalwert verringert. Der Algorithmus wird dann beendet, wenn durch Parametervariation mit der minimalen Schrittweite keine weitere Verringerung des Gütefunktionals mehr erzielt wird. Zur Bestimmung der Parameter sind auch andere gängige Optimierungs-

verfahren verwendbar.

Der Einfachheit wegen wird der Algorithmus hier ebenfalls zur Bestimmung von Modulationssignalen mit geringer Parameteranzahl benutzt.

#### Beispiel

Mit dem Signal nach Gl. (3.58) wird ein hysteresegesteuerter Aufwärtswandler moduliert. Das Modulationsprinzip ist in Bild 3.32 dargestellt. Der Schalter wird bei Er-

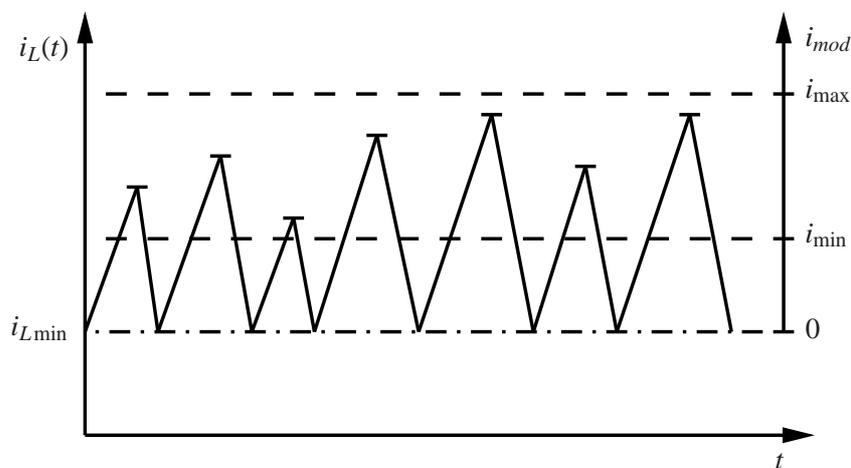


Bild 3.32: Modulation des Spulenstroms.

reichen von  $i_L = i_{L\min}$  ein- und bei Erreichen der Schwelle  $i_L = i_{L\max}$  wieder ausgeschaltet. Der äußere Regler variiert  $i_{L\min}$ .  $i_{L\max}$  wird zwischen einer oberen Grenze  $i_{L\min} + i_{\max}$  und einer unteren Grenze  $i_{L\min} + i_{\min}$  moduliert. Es wird davon ausgegangen, daß das System im eingeschwungenen Zustand ist und der Regler ein in Näherung konstantes Ausgangssignal  $i_{L\min}$  generiert.  $\alpha$  ist auf minimale spektrale Leistung in der Umgebung der mittleren Taktfrequenz zu optimieren. Das Kriterium  $J_{2a}$  wird benutzt. Die Parameter sind  $c_1 = 340\text{kA/s}$ ,  $c_2 = 680\text{kA/s}$ ,  $i_{\min} = 1\text{A}$ ,  $i_{\max} = 1.2\text{A}$ ,  $N = 24$ . Die niedrigste maximale spektrale Leistung wird für  $\alpha = 3.14$  erreicht.

Soll eine weitere Verringerung der maximalen spektralen Leistung erreicht werden, so kann die Anzahl der Parameter bei dieser Variante der Generierung der Modu-

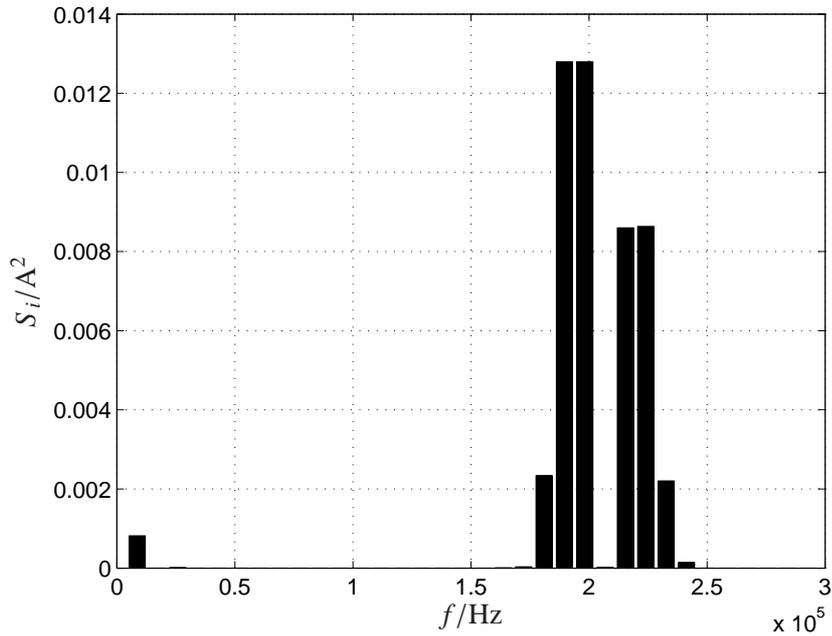


Bild 3.33: Leistungsspektrum des Spulenstroms.

lationssequenz erhöht werden. Eine einfache Möglichkeit dazu ist:

$$w(n) = \begin{cases} w_{min} + a\left(\frac{n}{N}\right)^\alpha & 0 < n \leq \frac{1}{4}N \\ w_{max} - b\left|\frac{1}{2} - \frac{n}{N}\right|^{\alpha-\beta} & \frac{1}{4}N < n \leq \frac{3}{4}N \\ w_{min} + a\left(1 - \frac{n}{N}\right)^\alpha & \frac{3}{4}N < n \leq N \end{cases} \quad (3.60)$$

Für  $\beta > 0$  sinkt die Dichte der Modulationswerte, die höheren Frequenzen entsprechen, ab. Bei  $\beta < 0$  trifft dies auf die niedrigeren Frequenzen zu. Dies ermöglicht eine geringe Erhöhung der Anpaßbarkeit an vorgegebene Grenzkurven des Spektrums. Die Stetigkeitsbedingung an den Übergängen lautet hier:

$$a = \frac{t_{max} - t_{min}}{2} 4^\alpha, \quad b = \frac{t_{max} - t_{min}}{2} 4^{\alpha-\beta} \quad (3.61)$$

Soll die Anzahl der Optimierungsparameter zur besseren Anpassung an vorgegebene Grenzkurven oder zum Erreichen geringerer maximaler spektraler Leistungen weiter erhöht werden, so kann dies durch Variation der Intervallgrenzen nach Gl. (3.62) er-

folgen:

$$w(n) = \begin{cases} w_{min} + a \left(\frac{n}{N}\right)^\alpha & 0 < n \leq \frac{1}{2}kN \\ w_{max} - b \left|\frac{1}{2} - \frac{n}{N}\right|^{\alpha-\beta} & \frac{1}{2}kN < n \leq N - \frac{1}{2}kN \\ w_{min} + a \left(1 - \frac{n}{N}\right)^\alpha & N - \frac{1}{2}kN < n \leq N \end{cases} \quad (3.62)$$

Die Breite des mittleren Abschnittes wird mit dem Faktor  $k \in [0, 1]$  und der Wert an den Übergängen mit  $d \in [0, 1]$  parametrisiert. Die Stetigkeitsbedingung an den Übergängen führt auf die Parameter:

$$a = \frac{d \frac{\Delta t}{NT}}{\left(\frac{k}{2}\right)^\alpha} \quad b = \frac{(1-d) \frac{\Delta t}{NT}}{\left(\frac{1-k}{2}\right)^{\alpha-\beta}} \quad (3.63)$$

Die Optimierungsparameter sind  $\alpha, \beta, d$  und  $k$ . Soll die Ableitung an den Übergängen ebenfalls stetig sein, wird die Parameterzahl um eins reduziert und man erhält:

$$a = \frac{\frac{\Delta t}{NT}}{\left(\frac{k}{2}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \frac{1-k}{k}\right)} \quad b = \frac{\alpha \frac{\Delta t}{NT}}{\left(\frac{\alpha}{k} - \beta\right) \frac{k}{2} \left(\frac{1-k}{2}\right)^{\alpha-\beta-1}} \quad (3.64)$$

Dann sind die Parameter  $\alpha, \beta$  und  $k$  zu bestimmen. Bild 3.34 zeigt die auf die maximale spektrale Leistung des nicht modulierten Spulenstroms normierte maximale spektrale Leistung im Bereich der mittleren Taktfrequenz über der Länge  $N$  der Modulationssequenz. Deutlich ist erkennbar, daß die normierte maximale spektrale Leistung mit Erhöhung der Anzahl der Parameter sinkt. Mit zunehmender Länge der Modulationssequenz nimmt die maximale spektrale Leistung ab. Für  $N \rightarrow \infty$  konvergiert diese gegen Null. Dann geht das aus gewichteten Dirac-Impulsen bestehende Leistungsdichtespektrum in ein kontinuierliches Leistungsdichtespektrum über. Da in der Messung stets mit einer endlichen Filterbandbreite gearbeitet wird, welche durch die EMV-Normen vorgegeben ist, konvergiert die maximale normierte gemessene spektrale Leistung gegen den Grenzwert

$$S_{norm} = \frac{1}{2\Delta f} \int_{-\infty}^{\infty} |g_f(f)|^2 df,$$

wobei  $g_f(f)$  die Übertragungsfunktion des Bewertungsfilters ist. Kann diese durch

$$|g_f(f)| = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq |f| \leq b_f \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

approximiert werden, so beträgt der Grenzwert  $S_{norm} = \frac{b_f}{\Delta f}$ .

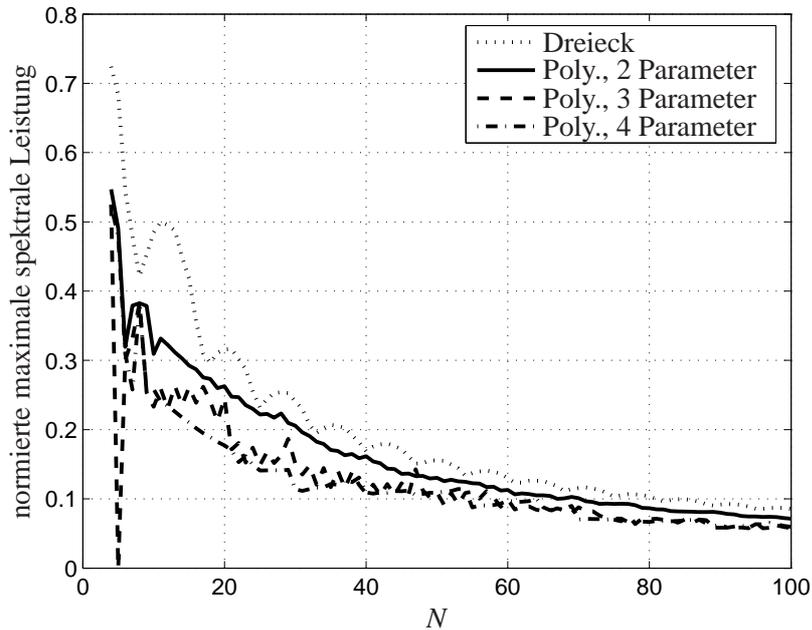


Bild 3.34: Auf die maximale spektrale Leistung des nicht modulierten Spulenstroms normierte maximale spektrale Leistung im Bereich der mittleren Zyklusfrequenz für verschiedene Modulationssignale.

**Modulation mit binärem Signal**

Besonders einfach fällt der Generator aus Bild 3.17 aus, wenn ein binäres Signal zur Modulation verwendet wird. Dann kann der D/A-Wandler als Umschalter realisiert werden. Im Speicher werden dann  $N$  1-Bit-Werte abgelegt. Der Generator gibt abhängig von  $n$  einen von zwei festen Modulationswerten aus. Die zu bestimmenden Parameter der Sequenz sind die Zeitpunkte, zu denen das Modulationssignal umgeschaltet wird. Dies führt zur notwendigen Berechnung von  $2^N$  Leistungsspektren, wenn alle möglichen Kombinationen berücksichtigt werden sollen. Da auch hier der Rechenaufwand bereits für die im vorherigen Beispiel verwendete Länge der Sequenz nicht mehr akzeptabel ist, wird ein anderer Weg zur Bestimmung der Parameter gewählt:

In den Speicher wird ein periodisches Rechtecksignal geschrieben, dessen Periodendauer und Tastverhältnis mit dem oben beschriebenen Algorithmus auf Minimierung des Gütefunktional  $J_{2a}$  gestellt werden. Das so erhaltene Signal wird zur Modu-

lation verwendet. Soll das Spektrum durch Erhöhung der Anzahl der Parameter verbessert werden, so ist eine anschließende Variation des Zeitpunktes des Auftretens jeder einzelnen Flanke vorgesehen. Dazu wird mit dem oben beschriebenen Suchalgorithmus der Zeitpunkt jeder einzelnen Flanke variiert, bis das lokale Minimum gefunden ist.

### Beispiel

Nach diesem Verfahren wird der Wandler aus dem letzten Beispiel mit identischen Parametern moduliert. Die Bestimmung des periodischen Rechtecksignals liefert eine optimale Periodendauer des Rechtecksignals von 14 Werten und ein Tastverhältnis von 0.47. Durch die anschließende Variation der einzelnen Taktflanken wird eine weitere Verringerung der maximalen spektralen Leistung erreicht. Bild 3.35 zeigt die auf

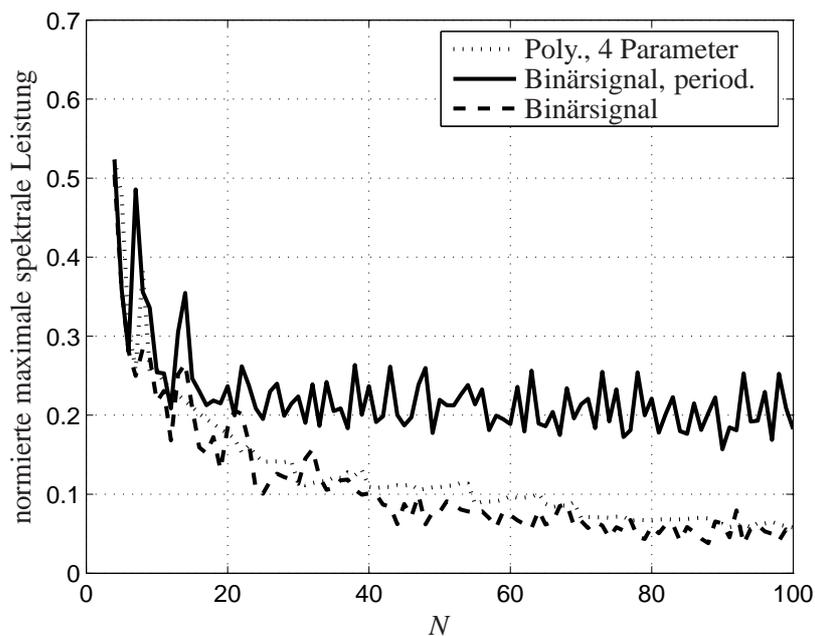


Bild 3.35: Auf die maximale spektrale Leistung des nicht modulierten Spulenstroms normierte maximale spektrale Leistung im Bereich der mittleren Zyklusfrequenz für Modulation mit durch Optimierung bestimmtem binärem Modulationssignal.

die maximale spektrale Leistung des nicht modulierten Signals normierte maximale Leistung des Spulenstroms im Bereich der mittleren Taktfrequenz bei Modulation mit

periodischem Binärsignal und dem Binärsignal mit den nachträglich durch Optimierung bestimmten Flanken im Vergleich zur Modulation mit polynomialem Signal mit 4 bestimmten Parametern. Bei der Modulation mit periodischem binären Signal ist deutlich zu erkennen, daß ab dem Erreichen der optimalen Periodendauer  $N = 14$  eine weitere Erhöhung von  $N$  keinerlei zusätzliche Verringerung der maximalen spektralen Leistung mehr bringt. Bei Modulation mit binärem Signal mit separat bestimmten Flanken sinkt die maximale spektrale Leistung mit zunehmender Länge  $N$ . Die Unterdrückung der spektralen Anteile ist vergleichbar mit der bei Anwendung des Polynoms mit 4 Parametern bzw. liegt leicht darüber, da hier jede Flanke einen Optimierungsparameter darstellt und somit mit zunehmender Länge der Sequenz die Anzahl der Optimierungsparameter steigt. Zu beachten ist jedoch, daß für höhere Vielfache  $i$  der mittleren Zyklusfrequenz der Wert  $\frac{f_{mod}}{f_0}$  sinkt und die Modulation für höhere Vielfache in eine langsame Modulation übergeht, für die die Näherung Gl. (3.55) gilt. Damit fällt die Verringerung bei Modulation mit binärem Signal für hohe Vielfache geringer aus als bei Anwendung der Modulation mit polynomialem Signal. Bild 3.36 zeigt die immer noch geringe Flexibilität in der Anpassung an verschiedene vorgegebene EMV-Grenzkurven. Diese kann durch die folgende Methode zur Bestimmung der optimalen Modulationssequenz verbessert werden.

### **n-dimensionale Bestimmung der Folge von Modulationswerten**

In dieser Variante wird jeder einzelne Wert der Sequenz separat bestimmt, was in einem  $N$ -dimensionalen Optimierungsproblem mit dem bereits beschriebenen Rechenaufwand resultiert. Zur Verringerung des Rechenaufwandes wird jeder einzelne Wert mit dem bereits beschriebenen Algorithmus bestimmt. Als initiale Folge kann z.B. ein einziger konstanter Wert oder eine der bereits beschriebenen bestimmten Modulationssequenzen benutzt werden. Da dieser Algorithmus nicht zwangsläufig das globale Minimum findet, ist die Optimierung mit mehreren Initialisierungen zu empfehlen. Bild 3.37 zeigt die mit verschiedenen Initialisierungssequenzen erreichte auf die maximale Leistung des nicht modulierten Signals normierte maximale spektrale Leistung im Bereich der mittleren Zyklusfrequenz. Im Vergleich zu Bild 3.35 und Bild 3.34 ist deutlich zu erkennen, daß bereits bei einer Länge  $N = 20$  eine Verrin-

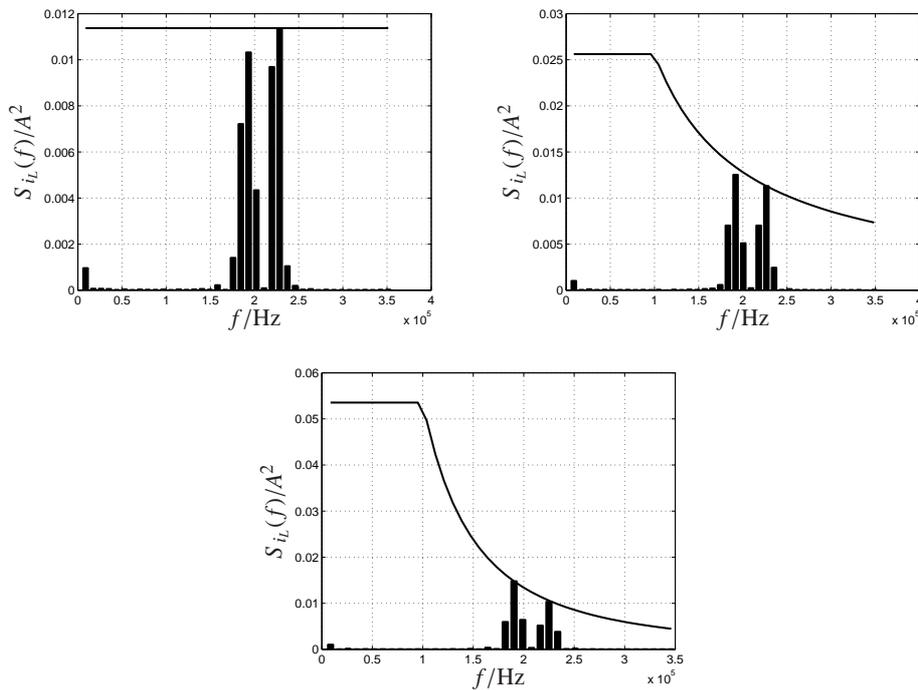


Bild 3.36: Leistungsspektrum des Spulenstroms bei Modulation Binärsignal für verschiedene EMV-Grenzkurven.

gerung der maximalen spektralen Leistung um 10dB erreicht wird, die die vorher beschriebenen Methoden erst bei  $N \approx 40$  erreichen. Weiterhin ist erkennbar, daß die erreichte Verringerung stark von der Initialisierung abhängt, da die Routine nur lokale Minima findet. Keine der vorher gezeigten Methoden garantiert bestmögliche Ergebnisse nach der beschriebenen Optimierung. Der Unterschied der erreichten Unterdrückung bei Verwendung der verschiedenen Initialisierungen beträgt etwa 6dB. Bild 3.38 zeigt das für  $N = 24$  erhaltene Leistungsspektrum bei Vorgabe verschiedener EMV-Grenzkurven für  $J_5$ . Die gegenüber den vorher beschriebenen Varianten verbesserte Anpassungsfähigkeit des Leistungsspektrums an vorgegebene Grenzkurven ist deutlich erkennbar. Nichtsdestotrotz eignen sich die vorher beschriebenen Methoden zur Erzeugung von Modulationsfolgen, die als initiale Folgen für den Optimierungsalgorithmus genutzt werden können.

Die hier beschriebenen Methoden wurden an einem DC-DC-Wandler getestet. Die Meßergebnisse stimmten gut mit der Theorie überein. Die Anwendung ist in [KS06c]

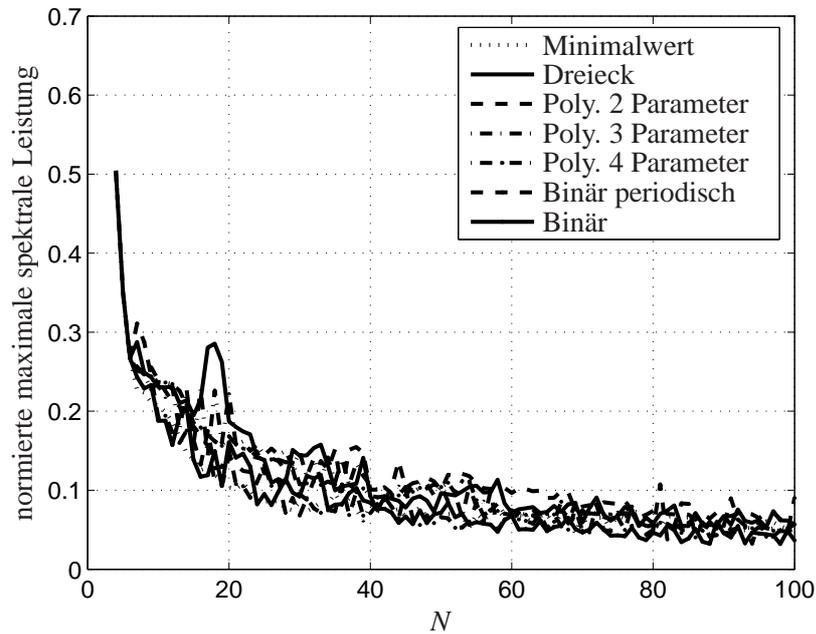


Bild 3.37: Auf die maximale spektrale Leistung des nicht modulierten Spulenstroms normierte maximale spektrale Leistung im Bereich der mittleren Zyklusfrequenz für Modulation mit  $N$ -dimensional bestimmtem Modulationssignal bei verschiedenen initialen Sequenzen.

veröffentlicht.

Neben der so bestimmten Modulationssequenz eignen sich das Gütefunktional  $J_5$  und die beschriebenen Algorithmen ebenfalls für eine iterative Bestimmung der Sequenz direkt im aufgebauten System mit Hilfe rechnergestützter Messungen. Da die Messung des Leistungsspektrums für diese Signale deutlich länger dauert als die Berechnung, ist es empfehlenswert, zunächst mit der beschriebenen Methode eine theoretische optimale Modulationssequenz zu ermitteln und anschließend am System nur noch die genaue Lage des lokalen Minimums zu suchen. Dadurch lassen sich auch bei Abweichungen des tatsächlichen Signals vom Modell gute Ergebnisse erreichen.

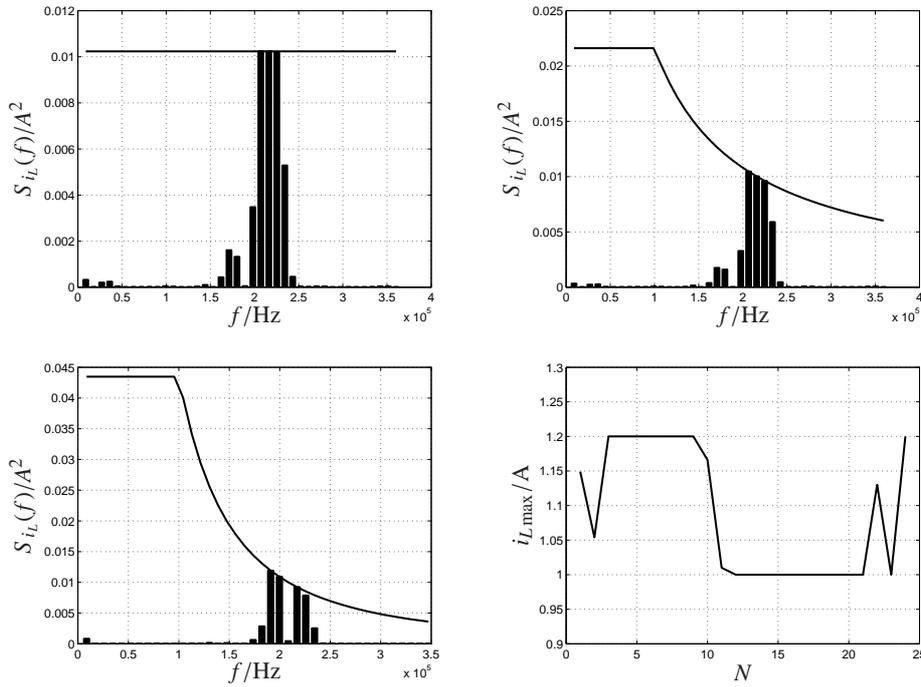


Bild 3.38: Leistungsspektren bei unterschiedlichen vorgegebenen EMV-Grenzkurven und ein Beispiel einer mit  $N$ -dimensionaler Dimensionierung erhaltener Modulationssequenz.

### 3.4.2 Modulation mit Zufallssignalen

Sind aufeinanderfolgende Zeitspannen voneinander unabhängig, können analytische Ausdrücke für die in Abschnitt 3.2.2 angegebenen Bewertungskriterien gefunden werden. In der charakteristischen Funktion  $k$ -ter Ordnung

$$\Theta_k(\omega) = \mathbb{E}\left(e^{j\omega \sum_{i=1}^k \bar{\tau}(i)}\right)$$

sind die Zeitspannen  $\bar{\tau}(i)$  unabhängig von  $i$ . Dann vereinfacht sich die charakteristische Funktion  $k$ -ter Ordnung zu:

$$\Theta_k(\omega) = \left(\mathbb{E}\left(e^{j\omega \bar{\tau}}\right)\right)^k = (\Theta_{\bar{\tau}}(\omega))^k .$$

Das Leistungsdichtespektrum des Impulsprozesses des Taktsignals ist dann:

$$S_{\xi}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_A^2}{Nm_{1\bar{\tau}}} + \frac{2}{Nm_{1\bar{\tau}}} \sum_{k=1}^{\infty} c_A(k) \operatorname{Re}(\Theta_{\bar{\tau}}^k(\omega)) .$$

Weiterhin lassen sich dann die Kumulanten und daraus die Momente der Ereigniszeiten berechnen. Für den Logarithmus der charakteristischen Funktion gilt:

$$\Psi_{\bar{\tau}(k)}(\omega) = k \ln \Theta_{\bar{\tau}}(\omega) = k \Psi_{\bar{\tau}}(\omega) .$$

Aus den Kumulanten

$$\kappa_{n\bar{\tau}(k)} = \frac{1}{jn} \frac{d^n \Psi_{\bar{\tau}(k)}(\omega)}{d\omega^n} = k \frac{1}{jn} \frac{d^n \Psi_{\bar{\tau}}(\omega)}{d\omega^n} = k \kappa_{n\bar{\tau}}$$

ergeben sich die Momente zu:

$$\begin{aligned} \kappa_{1\bar{\tau}(k)} = k \kappa_{1\bar{\tau}} &\rightarrow m_{1\bar{\tau}(k)} = k m_{1\bar{\tau}} \\ \kappa_{2\bar{\tau}(k)} = k \kappa_{2\bar{\tau}} &\rightarrow \sigma_{\bar{\tau}(k)}^2 = k \sigma_{\bar{\tau}}^2 \\ \kappa_{3\bar{\tau}(k)} = k \kappa_{3\bar{\tau}} &\rightarrow \xi_{\bar{\tau}(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \xi_{\bar{\tau}} \\ \kappa_{4\bar{\tau}(k)} = k \kappa_{4\bar{\tau}} &\rightarrow \epsilon_{\bar{\tau}(k)} = \frac{\epsilon_{\bar{\tau}}}{k} . \end{aligned} \quad (3.65)$$

Sind die aufeinanderfolgenden Intervalle statistisch unabhängig, so hängen alle statistischen Eigenschaften nur von der stationären Dichte ab.

Ist die Aktivierungsdauer innerhalb einer vorgegebenen Spanne gleichverteilt

$$f_{\bar{\tau}}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} & \text{für } \tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

so ist die charakteristische Funktion:

$$\Theta_{\bar{\tau}}(\omega) = \frac{1}{\omega(\tau_{\max} - \tau_{\min})} (e^{j\omega\tau_{\max}} - e^{j\omega\tau_{\min}}) .$$

Für das Leistungsdichtespektrum erhält man den Ausdruck

$$S_{\xi}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_A^2}{Nm_{1\bar{\tau}}} + \frac{2}{Nm_{1\bar{\tau}}} \sum_{k=1}^N c_A(k) \left[ \frac{1}{\omega(\tau_{\max} - \tau_{\min})} (\cos \omega\tau_{\max} - \cos \omega\tau_{\min}) \right]^k$$

mit:

$$m_{1\bar{\tau}} = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} .$$

In den folgenden Beispielen dient ein DC-DC-Wandler als Applikationsbeispiel. Für den Current Programmed Mode lautet die Abbildung aufeinanderfolgender Zeitintervalle im klassischen periodisch getakteten Fall:

$$\tau(k+1) = \begin{cases} -\frac{c_2}{c_1} \tau(k) & \text{für } k \text{ gerade} \\ T - \tau(k) \bmod T & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases} . \quad (3.66)$$

Die nachfolgenden Kenngrößen werden, auch, wenn oben analytische Ausdrücke angegeben wurden, durch Analyse einer Zeitreihe berechnet. Dies erlaubt die Beurteilung, wie nah die Ergebnisse an dem oben untersuchten Spezialfall liegen. Bild 3.39

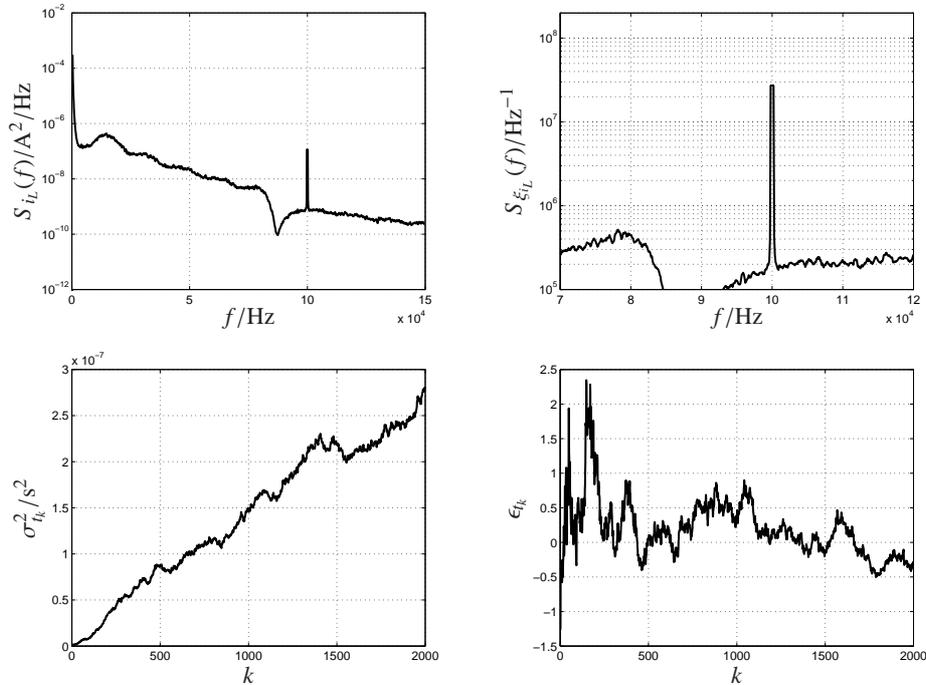


Bild 3.39: Leistungsdichtespektren des Spulenstroms (oben links) und des zugehörigen Impulsprozesses (oben rechts), sowie Varianz (unten links) und Excess (unten rechts) der Ereigniszeiten über  $k$ .

zeigt die mit 300Hz Filterbandbreite gefilterten Leistungsdichtespektren des Spulenstromes  $S_{i_L}(f)$  und des entsprechenden Impulsprozesses  $S_{\xi_{i_L}}(f)$  um die mittlere Taktfrequenz  $\frac{1}{T}$ . Der Unterschied beider Spektren besteht in der Multiplikation mit dem Betragsquadrat der Filterfunktion. Aus Gründen der Anschaulichkeit wird im folgenden nur noch das Leistungsdichtespektrum des Impulsprozesses gezeigt. In den folgenden Untersuchungen wird stets das mit 300Hz Bandbreite gefilterte Leistungsdichtespektrum verwendet, ohne die Filterung jedesmal zu erwähnen.

Die maximale spektrale Leistungsdichte entsteht an der Taktfrequenz, da der Setztakt des Wandlers periodisch ist. Zu Vergleichszwecken mit chaotisch modulierten Taktsignalen im nächsten Abschnitt sind in Bild 3.39 der Verlauf der Varianz  $\sigma_{i_k}^2$  und

des Excesses  $\epsilon_{t_k}$  der Ereigniszeiten des Wandlers dargestellt. Die Varianz steigt im Mittel linear mit dem Anstieg  $1.25 \cdot 10^{-10} \text{ s}^2/\text{Schritt}$ . Der Excess hat bei  $k = 0$  den Wert  $-1.2$  und steigt bereits bei sehr kleinen  $k$  auf Werte über Null an. Dies bedeutet, daß die Dichten eine schmale Form besitzen und sich nur schwach gegenseitig überlappen. Wie bereits in Abschnitt 3.2.2 erklärt, bedeutet dies eine hohe maximale Leistungsdichte.

Als nächstes wird ein Zufallssignal für den Setztakt verwendet. Die Folge von unkorrelierten Modulationswerten wird durch Mehrfachiteration der Bernoulliabbildung zwischen aufeinanderfolgenden Werten erzeugt. Die Anzahl der Iterationen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werten beträgt 100. Dann kann davon ausgegangen werden, daß die Korrelation von aufeinanderfolgenden Taktdauern vernachlässigbar ist. Zum Vergleich mit den Ergebnissen der anderen Abschnitte wird  $\frac{\Delta\tau}{m_{1\tau}} = 0.2$  wie im Beispiel 3.4.1 gewählt. Die mittlere Taktfrequenz soll  $100\text{kHz}$  betragen. Die Filterbandbreite beträgt  $300\text{Hz}$ .

Bild 3.40 zeigt das Leistungsdichtespektrum des ungefilterten Impulsprozesses des Setztaktsignals und des Spulenstroms sowie die Varianz und den Excess der Dichten der entsprechenden Intervalldauern. Die maximale Leistungsdichte ist  $\frac{1}{25}$  der bei nicht moduliertem Takt. Der Vergleich von Gl. (3.65) mit dem Verlauf des Excesses zeigt, daß die Eigenschaften eines echten Zufallssignals nicht vollständig erreicht wurden.

Aufgrund der notwendigen Mehrfachiteration der iterierten Abbildung ist der Realisierungsaufwand eines Zufallsgenerators höher als der eines Chaosgenerators. Wie der folgende Abschnitt zeigen wird, ist durch die Verwendung chaotischer Signale eine weitere Reduzierung der maximalen Leistungsdichte möglich. Außerdem existiert bereits umfangreiche Literatur zum Thema Modulation mit zufälligen Signalen [SVP95][SLA02][Sta93][CRS03a]. Dieser Ansatz wurde hier daher nicht weiter verfolgt.

### 3.4.3 Chaotische Modulation

Bei chaotischer Modulation sind aufeinanderfolgende Werte korreliert. Deshalb sind die im Abschnitt 3.4.2 erhaltenen analytischen Ausdrücke der statistischen Kenngrößen nicht verwendbar und der Berechnungsaufwand für diese Kenngrößen ist deutlich

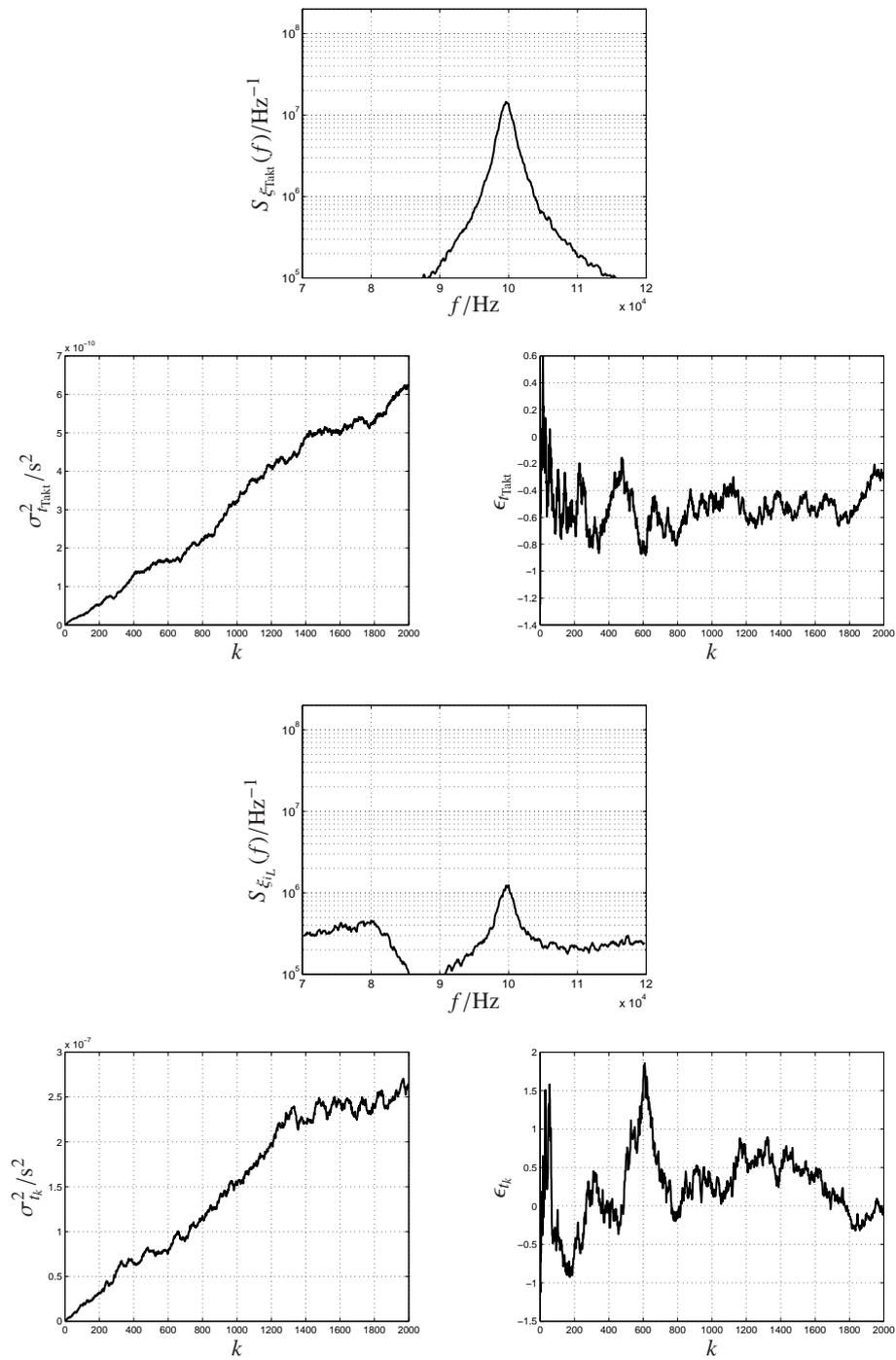


Bild 3.40: Leistungsdichtespektrum des Taktsignals (oben) und des Spulenstroms (unten) bei Verwendung der Bernoulliabbildung mit 100 Iterationen der Abbildung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Modulationswerten.

höher. Die Berechnung kann entweder durch Zeitreihenanalyse oder über die Bestimmung der Dichten  $f_{t_k}(t)$  aus der Abbildung z.B. mit Hilfe der symbolischen Dynamik [Kru01] oder der in Abschnitt 3.2.2 vorgeschlagenen kombinierten Verfahren erfolgen. Bei der Bestimmung der Dichten mit Hilfe der symbolischen Dynamik nimmt der Rechenaufwand aufgrund der exponentiell mit der Ordnung steigenden Anzahl von Symbolfolgen exponentiell zu. Zur exakten Berechnung sind die Dichten bis zur Ordnung unendlich zu bestimmen. Aufgrund des Rechenaufwandes ist die Bestimmung der Dichte mit dieser Methode bis etwa zur Ordnung  $k = 20$  möglich. Da in den folgenden Betrachtungen auch Abbildungen berücksichtigt werden sollen, bei denen sich die Dichten  $f_{t_k}(t)$  für  $k > 20$  noch signifikant verändern, werden die folgenden Untersuchungen anhand der Zeitreihenanalyse durchgeführt. Auch die angegebenen Dichten sind dann aus der Zeitreihe berechnet. Zur Bewertung wird wieder das mit 300Hz Bandbreite gefilterte Leistungsdichtespektrum verwendet. Neben dem Vergleich der Ergebnisse bei Anwendung verschiedener chaotischer Abbildungen zur Generierung des Modulationssignals wird ebenfalls die Anwendung der in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Kenngrößen Varianz und Excess der Dichten  $f_{t_k}(t)$  zur groben und schnellen Bewertung der erreichten Verringerung der maximalen Leistungsdichte gezeigt. Erfolgreich wurde die chaotische Modulation bereits in einer Ladungspumpe verwendet [Kru01][GKSB01][KS02b]. In der realisierten Schaltung wurde die Zeltabbildung verwendet.

In den folgenden Untersuchungen wird der Setztakt des Wandlers im CPM chaotisch mit der Abbildung  $H_w$  aufeinanderfolgender Zeitintervalle generiert. Bei chaotischem Takt läßt sich die Generierung der Intervalldauern durch die zweidimensionale Abbildung

$$\begin{pmatrix} \tau(k+1) \\ \tau_h(k+1) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{c_1}\tau(k) \\ H_{\tau_h}(\tau_h(k)) \end{pmatrix} & \text{für } k \text{ gerade} \\ \begin{pmatrix} \min_l \left( \sum_{i=0}^l H_{\tau_h}^i(\tau_h(k)) - \tau(k) \right) : \sum_{i=0}^l H_{\tau_h}^i(\tau_h(k)) > \tau(k) \\ H_{\tau_h}^l(\tau_h(k)) \end{pmatrix} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (3.67)$$

modellieren. Dabei ist  $\tau_h(k)$  das Zeitintervall des chaotischen Setztaktes. In Gl. (3.67) werden nur die Setztakte verwendet, in denen ein Ereignis eintritt. Für gerade  $k$  werden  $l-1$  mit  $H_{\tau_h}$  generierte aufeinanderfolgende Setztakte vom Wandler übersprungen. Für ungerade  $k$  werden keine Setztakte übersprungen. Übersprungene Setztakte stellen nach Abschnitt 2.1 keine Ereignisse dar, da diese keine Änderung des diskreten Zustands verursachen.

Für  $H_{\tau_h}$  werden nun verschiedene Abbildungen verwendet. Zum Vergleich mit den Ergebnissen der vorangegangenen Abschnitte wird  $\frac{\Delta\tau}{m_{1\tau}} = 0.2$  und die mittlere Taktfrequenz von 100kHz gewählt. Die Taktintervalle werden dann mit

$$\tau_h(k) = 9\mu\text{s} + 0.2\mu\text{s} \cdot w(k)$$

$$w(k+1) = H_w(w(k)), H_w : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

generiert. Angegeben wird wegen der Übersichtlichkeit die Abbildung  $H_w$ . Die Abbildung  $H_{\tau_h}$  läßt sich daraus mit

$$H_{\tau_h}(\tau(k)) = 0.9\mu\text{s} + 0.2\mu\text{s} \cdot H_w\left(\frac{\tau_h(k) - 0.9\mu\text{s}}{0.2\mu\text{s}}\right)$$

gewinnen. Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt zugunsten der Kompaktheit in Tabellenform.

Zunächst erfolgt die Bewertung des Ausgangssignals des Taktgenerators, mit dem das Setzen des Schalters im Wandler erfolgt.

Bild 3.41 bis 3.43 zeigen die Verläufe von Leistungsdichtespektrum  $S_{\xi_{\text{Takt}}}(f)$  des das Taktsignal des Setztaktes modellierenden nicht gefilterten Impulsprozesses, sowie Varianz  $\sigma_{t_k}^2$  und Excess  $\epsilon_{t_k}$  der Dichten der Ereigniszeitpunkte. Die geringste maximale Leistungsdichte wird mit der Abbildung  $H_w = 2w \bmod 1$  erzielt. Der Vergleich von Varianz und Excess mit den entsprechenden Größen der anderen Abbildungen zeigt, daß der Maximalwert des Excesses der Abbildung  $H_w = 2w \bmod 1$  der geringste der angegebenen Varianten ist. Die Zeltabbildung und die Abbildung  $H_w = 3w \bmod 1$  generieren einen grob vergleichbaren Verlauf für den Excess, jedoch ist bei beiden die Varianz deutlich geringer als bei Verwendung der Abbildung  $H_w = 2w \bmod 1$ . Die anderen Abbildungen generieren zwar eine größere Varianz, jedoch nimmt der Excess hier auch deutlich größere Werte an. Nach den Ergebnissen aus Abschnitt 3.2.2 ist

Abbildung:  $H_w = 3w \bmod 1$

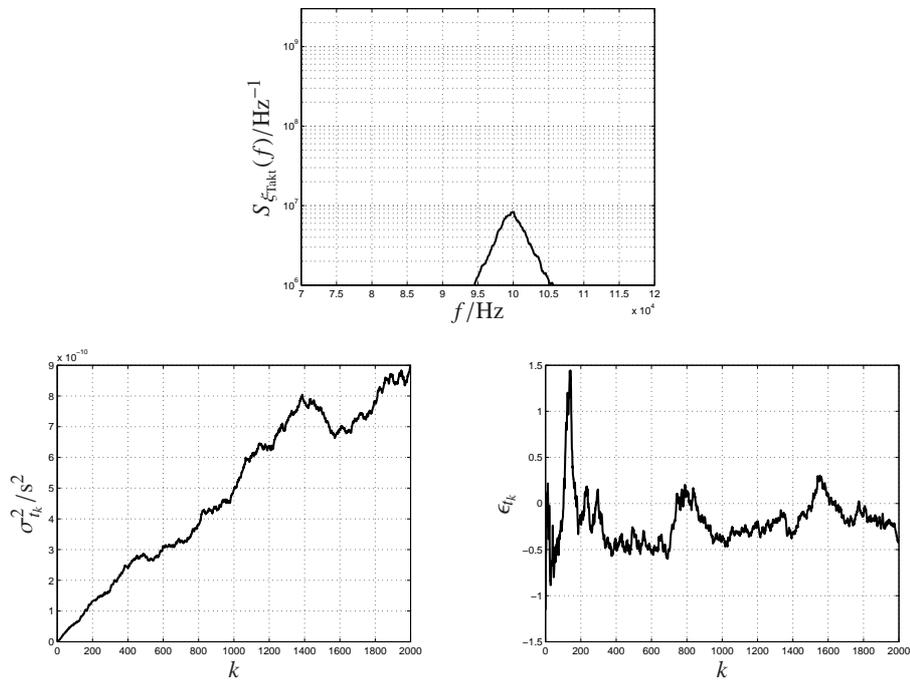


Bild 3.41: Vergleich des Taktsignals generiert mit verschiedenen chaotischen Abbildungen.

die maximale Leistungsdichte dann gering, wenn sich aufeinanderfolgende Dichten  $f_{\tau(k)}$  gegenseitig auslöschen. Dies trifft für die Abbildung  $H_w = 2w \bmod 1$  am besten zu. Bei dieser Abbildung ist der maximale Excess am niedrigsten. Damit ist die Form der Dichten sehr breit und eine starke gegenseitige Überlappung und Auslöschung der Dichten ist gesichert. Der Vergleich bestätigt die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2.2.

Die grobe Bewertung der Performance des Leistungsdichtespektrums mit der Abhängigkeit der Varianz und des Excesses der Dichten  $f_{i_k}$  vom Iterationsschritt  $k$  bringt eine deutliche Ersparnis in der Rechenzeit, da hierfür kein Leistungsdichtespektrum berechnet werden muß. Die Methode wurde in [KS05] veröffentlicht.

Im nächsten Schritt erfolgt die Bewertung der spektralen Performance des Spulenstroms des Wandlers. Dazu werden die vorhergehenden Untersuchungen für den nicht gefilterten Impulsprozeß, der den Spulenstrom des Wandlers modelliert, wiederholt.

Bild 3.44 bis 3.46 stellen die Verläufe des Leistungsdichtespektrums, sowie der Va-

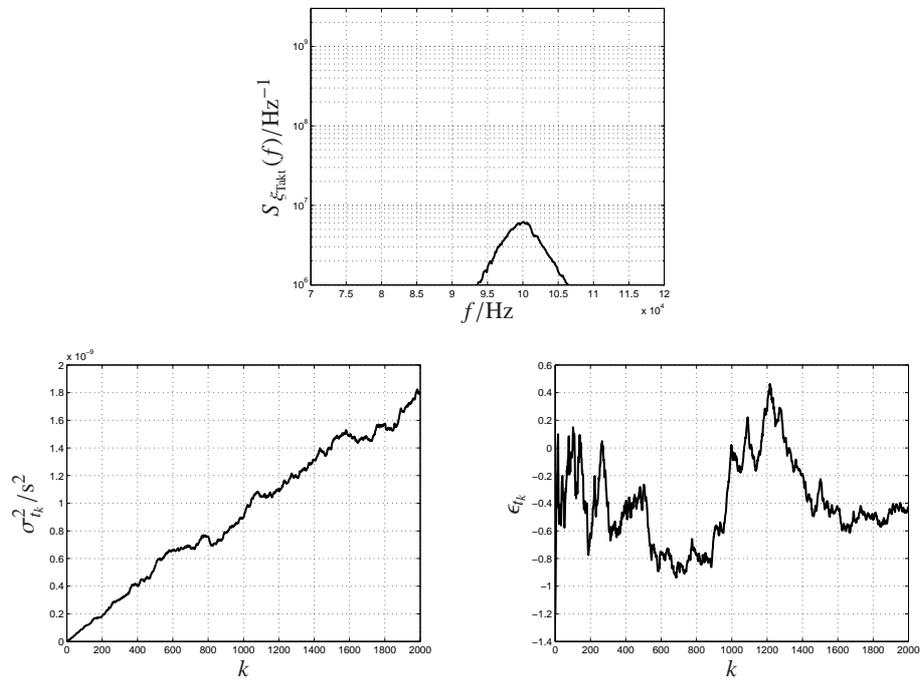
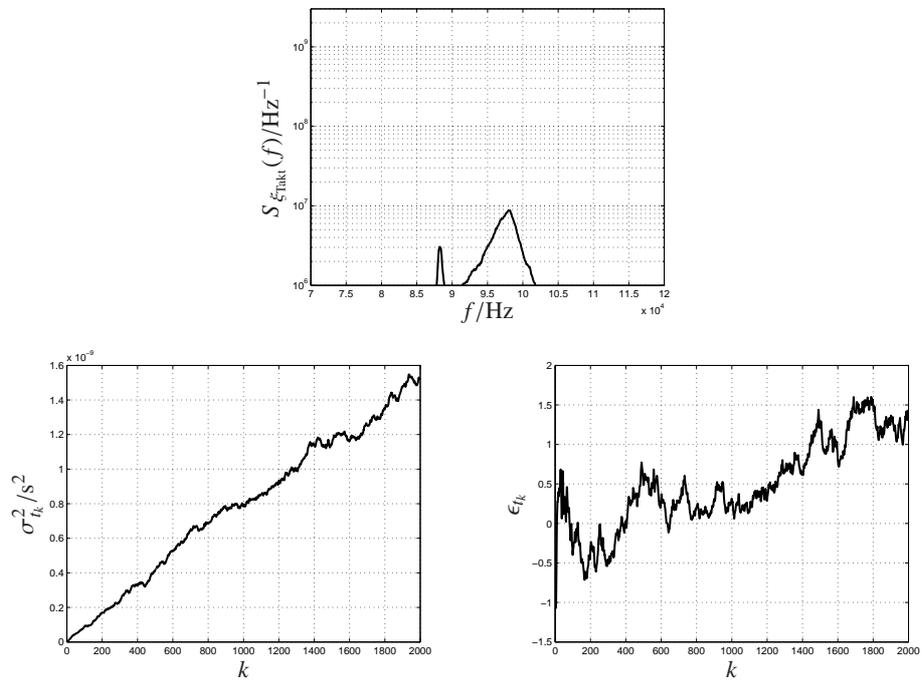
Abbildung:  $H_w = 2w \bmod 1$ Abbildung:  $H_w = 1.25w \bmod 1$ 

Bild 3.42: Vergleich des Taktsignals generiert mit verschiedenen chaotischen Abbildungen.

Abbildung:  $H_w = 1.05w \bmod 1$

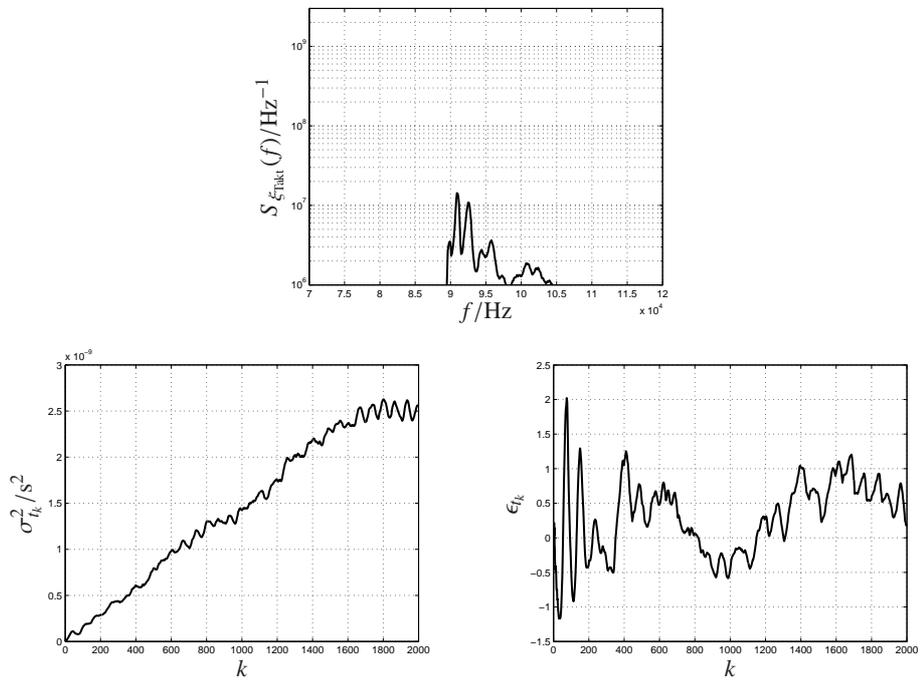


Abbildung:  $H_w = 2w - \epsilon\left(w - \frac{1}{2}\right) \cdot 4\left(w - \frac{1}{2}\right)$

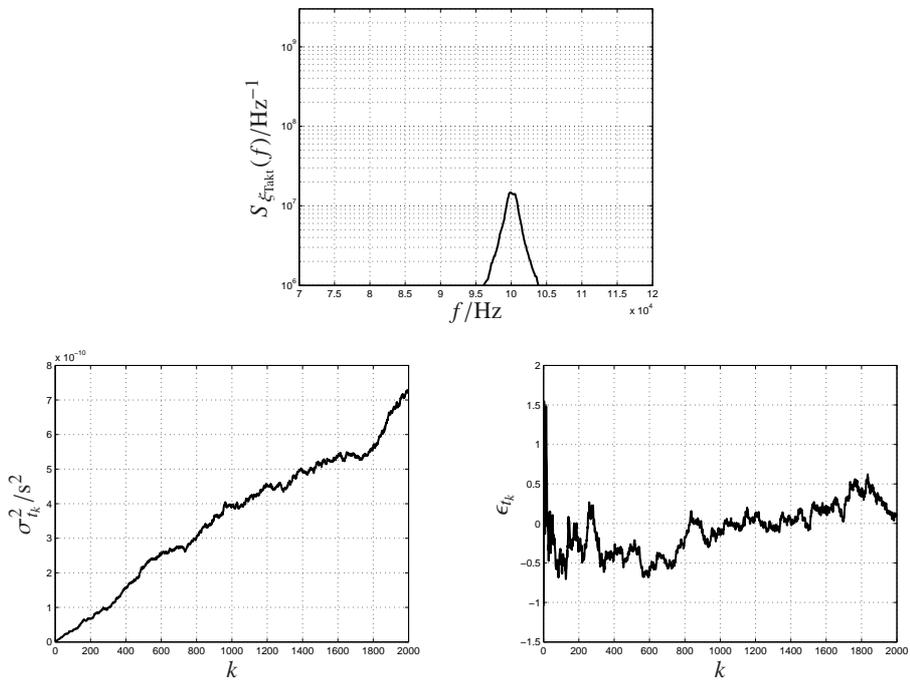


Bild 3.43: Vergleich des Taktsignals generiert mit verschiedenen chaotischen Abbildungen.

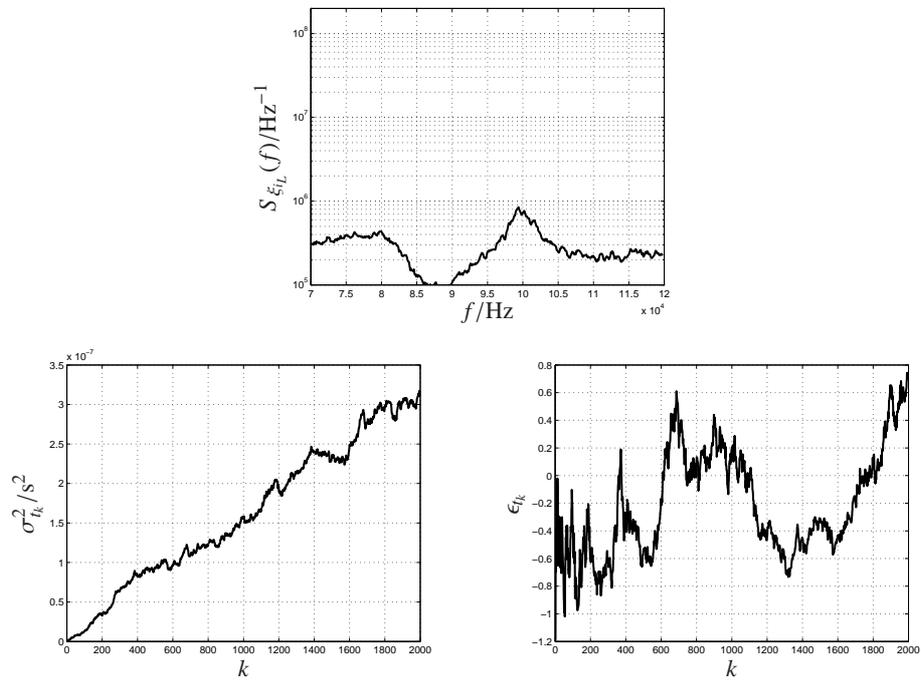
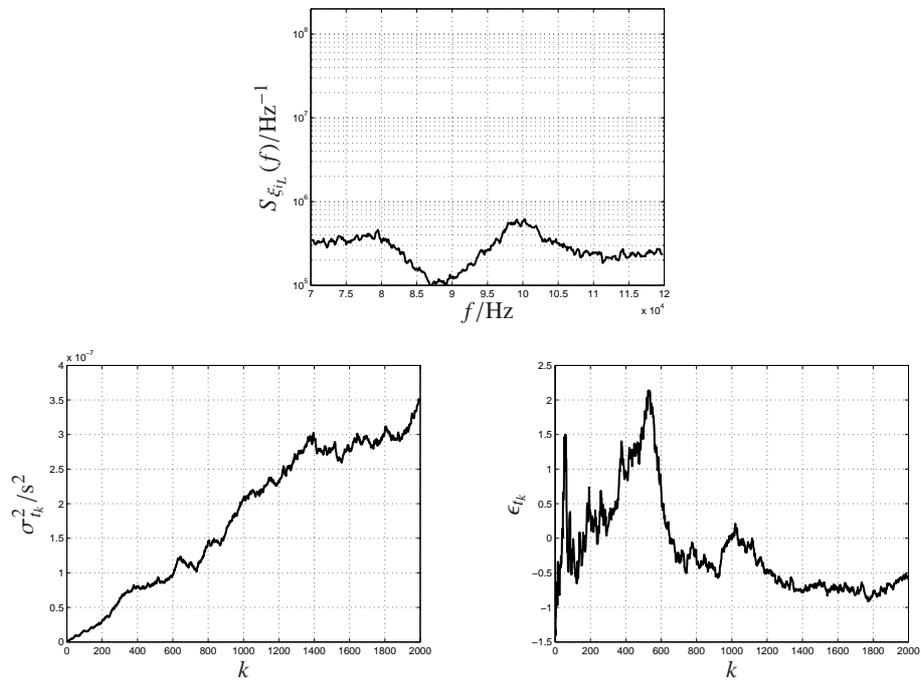
Abbildung:  $H_w = 3w \bmod 1$ Abbildung:  $H_w = 2w \bmod 1$ 

Bild 3.44: Vergleich der spektralen Performance des Spulenstroms bei Verwendung verschiedener chaotischer Abbildungen zur Taktgenerierung.

Abbildung:  $H_w = 1.25w \text{ mod } 1$

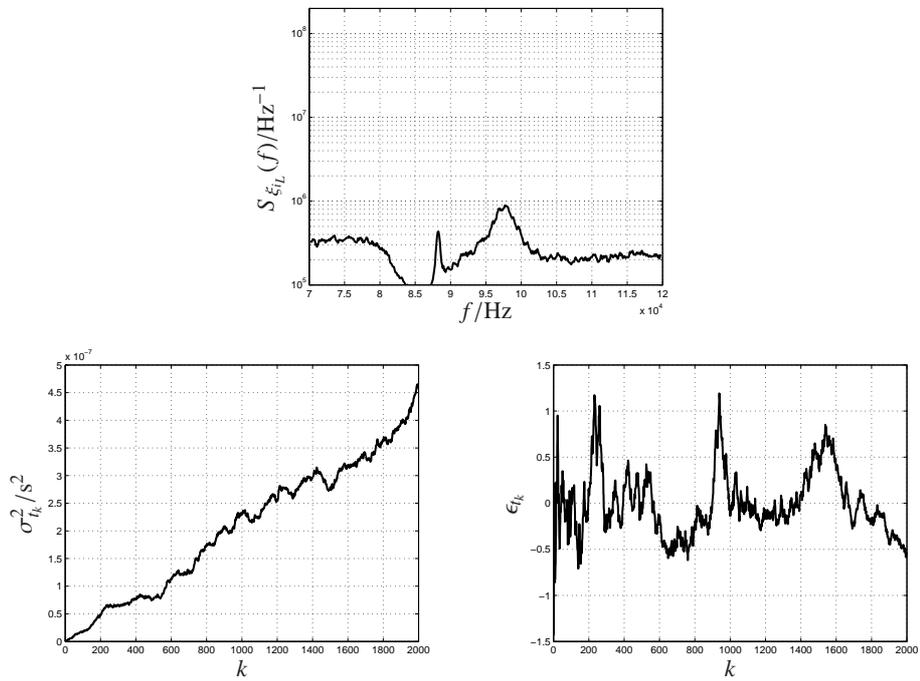


Abbildung:  $H_w = 1.05w \text{ mod } 1$

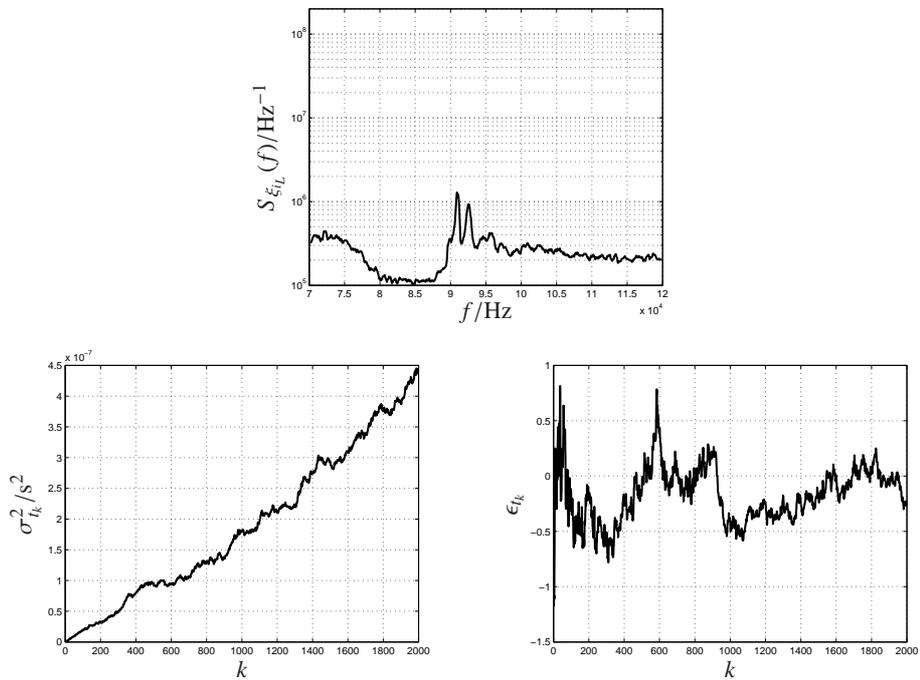


Bild 3.45: Vergleich der spektralen Performance des Spulenstroms bei Verwendung verschiedener chaotischer Abbildungen zur Taktgenerierung.

Abbildung:  $H_w = 2w - \epsilon\left(w - \frac{1}{2}\right) \cdot 4\left(w - \frac{1}{2}\right)$

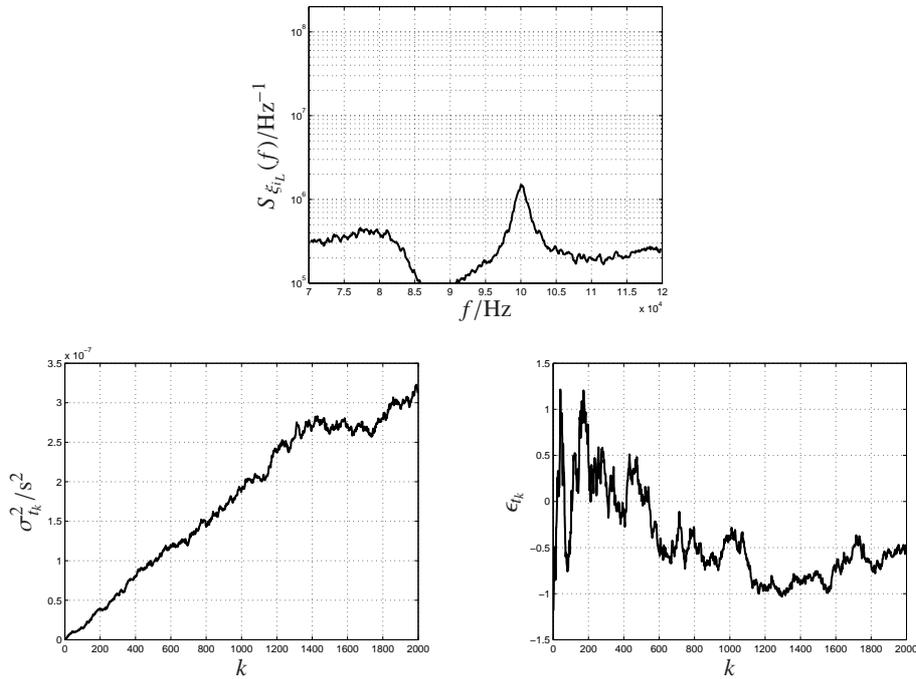


Bild 3.46: Vergleich der spektralen Performance des Spulenstroms bei Verwendung der Zeltabbildung zur Taktgenerierung.

rianz und des Excesses der Dichten der Ereigniszeitpunkte bei Verwendung verschiedener chaotischer Abbildungen zur Generierung des Setztaktes dar. Auch hier wird die geringste maximale Leistungsdichte bei Verwendung der Abbildung  $H_w = 2w \bmod 1$  erreicht. Die Verringerung der maximalen gefilterten Leistungsdichte im Bereich der mittleren Taktfrequenz beträgt ca. 16dB gegenüber dem periodisch getakteten Wandler. Vergleicht man hier Varianz und Excess, so fällt auf, daß die Unterschiede für die einzelnen Abbildungen deutlich geringer ausfallen als in den Untersuchungen des Taktsignals. Insbesondere ist der Verlauf von Varianz und Excess bei Verwendung der Zeltabbildung sehr ähnlich zu denen der Abbildung  $H_w = 2w \bmod 1$ , obwohl die maximale Leistungsdichte bei Verwendung der Zeltabbildung deutlich größer ist. Ursache des sehr ähnlichen Verlaufs von Varianz und Excess ist, daß hier in der Systemabbildung Gl. (3.67) zwei ineinander verschachtelte Prozesse existieren. Einer ist das Verhalten des Wandlers, Gl. (3.66) und der andere ist die Generierung des Taktes. Zur

Beurteilung derartiger Mehrtaktschemata ist die grobe Bewertung unter Nutzung von Excess und Varianz unzureichend.

Allgemein kann ausgesagt werden, daß derzeit noch kein Verfahren zum systematischen Entwurf einer chaotischen Abbildung aus vorgegebenen spektralen Forderungen existiert. Weiterhin existiert noch keine explizite Abhängigkeit, die aus der Forderung nach sich gegenseitig möglichst stark überlappenden Dichten Parameter einer Abbildung bestimmt. Jedoch kann bei Vorgabe einer parametrisierten Gleichung für die Abbildung unter Nutzung des Kriteriums  $J_{2a}$  oder  $J_5$  mit dem in Abschnitt 3.4.1 beschriebenen Optimierungsverfahren ein Parametersatz gefunden werden, der für die gegebene Abbildung eine Minimierung der maximalen Leistungsdichte garantiert. Dies wird im folgenden verfolgt. Als Applikation dient der hysterese gesteuerte Wandler aus Abschnitt 3.4.1.

Zunächst erfolgt die Bestimmung des Parameters  $a$  der Abbildung  $H_w = aw \text{ mod } 1$ . Das Ergebnis der Optimierung ist  $a = 1.1$ . Bild 3.47 stellt das gefilterte Leistungs-

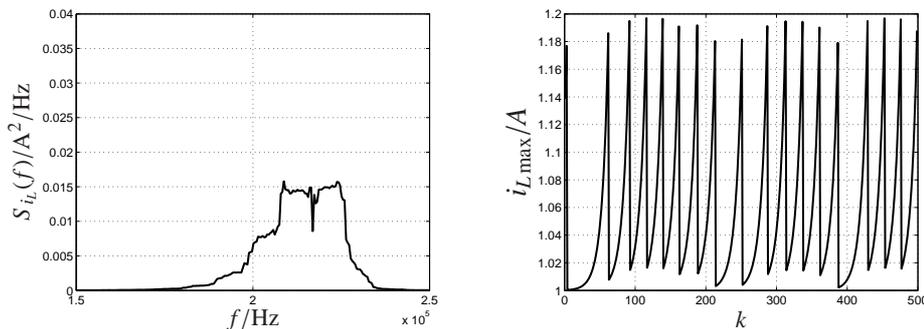


Bild 3.47: Gefiltertes Leistungs dichtespektrum des Spulenstroms und Modulationssignal bei Verwendung der durch Optimierung bestimmten Bernoulliabbildung.

tespektrum und die Modulationssequenz  $i_{L,max}(n)$  dar. Die resultierende Modulation ist eine langsame Modulation, so daß in Näherung Gl. (3.55) gilt. Eine Bestimmung der Start- Eck- und Endwerte der Zeltabbildung und der inversen Zeltabbildung führt auf die Parametersätze

Zeltabbildung: Startwert=0, Eckwert=0.99, Endwert=0

inverse Zeltabbildung: Startwert=0.1, Eckwert=0.01, Endwert=1,

bei denen ebenfalls eine langsame Modulation entsteht. Die Leistungs dichtespektren

und Modulationssignale sind sehr ähnlich mit Bild 3.47 und werden daher nicht dargestellt. Zu Vergleichszwecken wurde der Parameter  $a$  der Abbildung  $H_w = 1 - aw \bmod 1$  bestimmt, die aufgrund der springenden aufeinanderfolgenden Werte keine langsame Modulation erlaubt. Der ermittelte optimale Parameter ist  $a = 8.3$ . Bild 3.48 zeigt

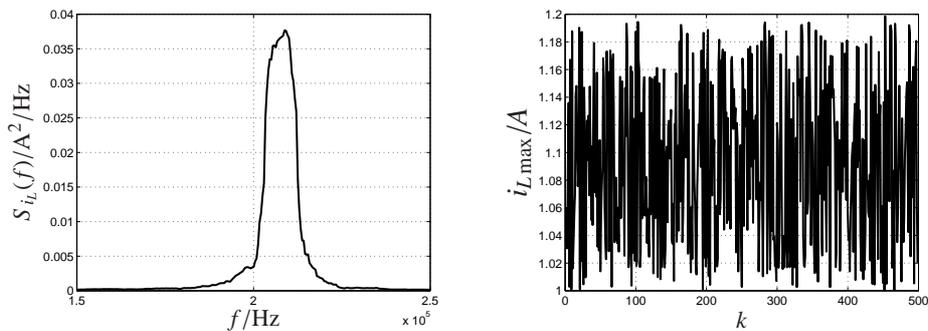


Bild 3.48: Gefiltertes Leistungsdichtespektrum des Spulenstroms und Modulationssignal bei Verwendung der durch Optimierung bestimmten Renyiabbildung.

das Leistungsdichtespektrum und den Verlauf des Modulationssignals. Die maximale Leistungsdichte ist deutlich größer als im Fall der langsamen Modulation. Neben der Veränderung der Parameter der Abbildung kann ein langsames chaotisches Modulationssignal auch dadurch generiert werden, daß ein  $n : 1$ -Takteiler vor die Abtast-Halteschaltung in Bild 3.18 geschaltet wird. Dann iteriert die Abbildung nur noch alle  $n$  Takte. Für die Abbildung  $H_w = 2w \bmod 1$  ist das Leistungsdichtespektrum des Spulenstroms in Bild 3.49 dargestellt. Es hat jetzt annähernd Rechteckform und die maximale Leistungsdichte ist kaum weiter verringierbar.

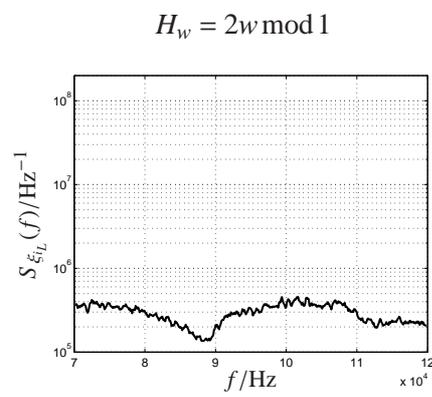


Bild 3.49: Leistungsdichtespektrum des Spulenstroms bei Verwendung der Bernoulliabbildung mit Taktteiler,  $n = 10$ .



## Kapitel 4

# Statistische Modellerweiterungen und Reglerentwurf

Für periodisch arbeitende Systeme existieren klassische Entwurfsverfahren, die gemittelte Modelle benutzen. Ziel dieses Kapitels ist, ähnliche Modelle abzuleiten, die für den Reglerentwurf nichtperiodisch arbeitender hybrider Systeme genutzt werden können. Während das Ziel der klassischen Regelungstechnik die Stabilisierung von Fixpunkten oder periodischen Orbits ist, wird hier die Stabilisierung statistischer Kenngrößen, wie Erwartungswert und Varianz oder Dichte des kontinuierlichen Zustands verfolgt. In der Modellierung nichtperiodisch arbeitender Systeme ist die Nutzung dieser statistischen Kenngrößen notwendig. In diesem Kapitel werden statistische Mittelwerte sowohl zur Modellierung als auch zur Bestimmung von Regler- und Streckenparametern mit Optimierungsverfahren benutzt. Dazu wird zunächst für eindimensionale hybride Systeme die Entwicklung der Dichte des kontinuierlichen Zustands und die Berechnung der stationären Dichte des kontinuierlichen Zustands aus statistischen Kenngrößen der iterierten Abbildung untersucht. Für nichtperiodisch arbeitende Systeme wird die stationäre Dichte des kontinuierlichen Zustands anschließend verwendet, um Aussagen über die Stabilität des kontinuierlichen Zustands zu treffen. Aus den Dichten lassen sich die statistischen Mittelwerte gewinnen. Unter Nutzung dieser wird ein gemittelt Modell für nichtperiodisch arbeitende Systeme abgeleitet. Weiterhin wird eine Variante zur Optimierung von Regler- und Streckenparametern gezeigt, die statistische Mittelwerte eingebetteter Abbildungen verwendet. Das Kapitel schließt mit

einem Abschnitt über die Generierung beliebiger Impedanzen durch geeignete Steuerung von hybriden Systemen der Leistungselektronik ab.

Die Dichteentwicklung im folgenden Abschnitt wird für eindimensionale kontinuierliche Zustände abgeleitet. Die in den folgenden Abschnitten auf Dichten basierenden Untersuchungen gelten ebenfalls für Systeme mit eindimensionalem kontinuierlichen Zustand.

## 4.1 Dichtefunktionen

### 4.1.1 Dichteentwicklung des kontinuierlichen Zustands

Aus einer gegebenen Dichte des kontinuierlichen Zustands  $f_{x_0}(x)$  zum Anfangszeitpunkt  $t = 0$  ist die Entwicklung der Dichte des kontinuierlichen Zustands mit der Zeit zu ermitteln. Die Bestimmung dieser Entwicklung ist mit Hilfe der Systemdynamik möglich.

#### Berechnung der Dichteentwicklung aus der Ableitung der Systemdynamik

Die Systemdynamik sei gegeben durch  $\dot{x} = f(x)$ . Die Systemdynamik verändert die Dichte des kontinuierlichen Zustands zum einen durch Translation eines Intervalls  $\Delta x$  und zum anderen durch Streckung/Stauchung des Intervalls  $\Delta x$ , in dem eine Menge  $\mathcal{X}_C$  von abgebildeten Werten liegt. Aus diesen beiden Effekten wird hier eine Differentialgleichung für die Entwicklung der Dichte des kontinuierlichen Zustands entwickelt.

- Berücksichtigung der Verschiebung des Intervalls  $\Delta x$

Wirkt sich die Systemdynamik ausschließlich in einer Verschiebung des Intervalls  $\Delta x$  aus, so berechnet sich die Dichte nach Ablauf der Zeitspanne  $dt$  durch Verschiebung des Argumentes:

$$f_x(x, t + dt) = f_x(x - dt \cdot f(x), t) .$$

- Kontraktion/Expansion des Intervalls  $\Delta x$  innerhalb der Zeitspanne  $dt$

Da das Integral über die Dichte konstant ist, gilt für die Dichte innerhalb des zeitvarianten Intervalls  $\Delta x(t)$  vor und nach Ablauf der Zeitspanne  $dt$ :

$$f_x(t + dt) \cdot \Delta x(t + dt) = f_x(t) \cdot \Delta x(t) .$$

Mit

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x) \rightarrow dx(t) = f(x)dt$$

und

$$\frac{dx(t+dt)}{dt} = f(\tilde{x}) \rightarrow dx(t+dt) = f(\tilde{x})dt = f(x+dt \cdot f(x)) \cdot dt$$

folgt:

$$\frac{dx(t)}{dx(t+dt)} = \frac{f(x)}{f(x+dt \cdot f(x))}.$$

Daraus folgt für die Dichte:

$$f_x(x, t+dt) = f_x(x-dt \cdot f(x), t) \cdot \frac{f(x)}{f(x+dt \cdot f(x))}. \quad (4.1)$$

In Gl. (4.1) beschreibt der erste Faktor die Verschiebung und der Quotient die Streckung/Stauchung des Intervalls  $\Delta x$ . Gleichung (4.1) kann zu einer Differentialgleichung umgeformt werden:

$$\frac{f_x(x, t+dt) - f_x(x, t)}{dt} = \frac{f_x(x-dt \cdot f(x), t) \frac{f(x,t)}{f(x+dt \cdot f(x), t+dt)} - f_x(x, t)}{dt}.$$

Mit

$$\frac{1}{1+\epsilon} = 1 - \epsilon \quad \text{für} \quad \epsilon \ll 1$$

folgt

$$\frac{f_x(x, t+dt) - f_x(x, t)}{dt} = \frac{\left(f_x(x, t) - \frac{\partial f_x}{\partial x} dt \cdot f(x, t)\right) \left(1 - \frac{\partial f}{\partial x} dt\right) - f_x(x, t)}{dt}$$

und:

$$\frac{f_x(x, t+dt) - f_x(x, t)}{dt} = \frac{f_x(x, t) - \frac{\partial f_x}{\partial x} f(x) dt - \frac{\partial f}{\partial x} f_x(x, t) dt + \frac{\partial f_x}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} f(x) dt^2 - f_x(x, t)}{dt}.$$

Vernachlässigt man den Ausdruck  $\frac{\partial f_x}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} f(x) dt^2$  gegenüber den anderen Termen und berechnet Grenzübergang für  $dt \rightarrow 0$ , erhält man die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f_x(x, t)}{\partial t} = -f_x(x, t) \frac{\partial f(x)}{\partial x} - f(x) \frac{\partial f_x(x, t)}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Gleichung (4.2) gibt die Entwicklung der Dichte des kontinuierlichen Zustands an, wenn die Dynamik des kontinuierlichen Zustands zeitinvariant ist. Diese Gleichung entspricht der Fokker-Planck Gleichung ohne Diffusionsterm [Ris96].

Soll der Verlauf der Dichte im hybriden System ermittelt werden, so ist die partielle Differentialgleichung (4.2) für jeden diskreten Zustand separat aufzustellen. Dann beschreiben die Teildichten

$$f_{x,q}(x, q, t) = \frac{d}{dx} P(X(t) < x, Q(t) = q)$$

die separate Entwicklung des kontinuierlichen Zustands für die einzelnen diskreten Zustände. Die Dichte des kontinuierlichen Zustands ist die Summe dieser Teildichten:

$$f_x(x, t) = \sum_{q=1}^N f_{x,q}(x, q, t) .$$

Bedingt durch den Ereignisgenerator finden Zustandsübergänge des diskreten Teilsystems statt. Ereignissteuerung und Zeitsteuerung lassen sich, wie im folgenden Beispiel gezeigt wird, berücksichtigen:

- Ereignissteuerung

Ein ereignisgesteuertes eindimensionales System habe die Ereignisse  $e = 1 : x = x_{\max}$  und  $e = 2 : x = x_{\min}$ . Das diskrete Teilsystem sei modelliert durch:

$$q(k+1) = \begin{cases} 1 & \text{für } e = 2 \\ 2 & \text{für } e = 1 \end{cases} .$$

Für die Dichten der Teilensembles gelten dann die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f_{x_1}}{\partial t} = \begin{cases} \tilde{f}_1(x, t) & \text{für } x_{\min} < x \leq x_{\max} \\ \tilde{f}_2(x, t) \cdot \left| \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right| & \text{für } x = x_{\min} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_{x_2}}{\partial t} = \begin{cases} \tilde{f}_2(x, t) & \text{für } x_{\min} \leq x < x_{\max} \\ \tilde{f}_1(x, t) \cdot \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| & \text{für } x = x_{\max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

wobei  $\tilde{f}_1$  und  $\tilde{f}_2$  die jeweils rechte Seite von Gl. (4.2) für die beiden diskreten Zustände  $q = 1$  und  $q = 2$  ist. An der Stelle  $x = x_{\min}$  findet das Umschalten von  $q = 2$  nach  $q = 1$  statt. An dieser Stelle geht die Dichte  $f_{x_2}$  in die Dichte  $f_{x_1}$  über. An der Stelle  $x = x_{\max}$  geht die Dichte  $f_{x_1}$  in die Dichte  $f_{x_2}$  über. Außerhalb des Intervalls  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$  sind beide Teildichten Null.

Für ein eindimensionales ereignisgesteuertes System mit mehr als zwei Modi und Schaltschwellen kann die Differentialgleichung für die Teildichten verallgemeinert werden zu:

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial t} = \begin{cases} \tilde{f}_i(x, t) & \text{für } x \in [x_{\min i}, x_{\max i}], x \notin x_{Sli} \\ \tilde{f}_l(x, t) & \text{für } x \in x_{Sli} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (4.3)$$

In Gl. (4.3) ist  $[x_{\min i}, x_{\max i}]$  das Intervall, in dem der Modus  $q = i$  aktiviert ist.  $x_{Sli}$  ist die Schaltschwelle für den Zustandsübergang von  $q = l$  nach  $q = i$ .

- Zeitsteuerung

Wieder wird ein System mit zwei Modi betrachtet. Das System habe keinen äußeren Regler. Die Aktivierungsdauern  $\tau_1$  und  $\tau_2$  der beiden Modi seien konstant. Zunächst wird das gesamte Ensemble zeitsynchron initialisiert. Das Umschalten von  $q = 1$  nach  $q = 2$  erfolgt zu den Zeiten  $\bar{t}_{12i}$ , das Umschalten von  $q = 2$  nach  $q = 1$  zu den Zeiten  $\bar{t}_{21i}$ . Wegen der zeitsynchronen Steuerung ist zu jedem Zeitpunkt immer nur eine Teildichte verschieden von Null. Dann ist die Gesamtdichte gleich der Teildichte, die verschieden von Null ist und es gilt:

$$\frac{\partial f_x(x, t)}{\partial t} = \begin{cases} \tilde{f}_1(x, t) & \text{für } \bar{t}_{21i} \leq t < \bar{t}_{12i} \\ \tilde{f}_2(x, t) & \text{für } \bar{t}_{12i} \leq t < \bar{t}_{21i+1} \end{cases} .$$

Zu den Zeiten  $\bar{t}_{12i}$  springt  $f_{x_1}$  auf Null und  $f_{x_2}$  von Null auf den Wert von  $f_{x_1}$  unmittelbar vor dem Auftreten des diskreten Zustandsübergangs. Zu den Zeiten  $\bar{t}_{21i}$  tritt das dazu komplementäre Ereignis ein.

Die Gleichung läßt sich auf eine beliebige Anzahl  $N$  von diskreten Zuständen mit den Zustandsübergangszeiten  $\bar{t}_{ilm}$  vom Zustand  $i$  zum Zustand  $l$  erweitern:

$$\frac{\partial f_x(x, t)}{\partial t} = \begin{cases} \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{f}_l(x, t) & \text{für } \bar{t}_{nli} \leq t < \bar{t}_{lni} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{cases} . \quad (4.4)$$

Die Berechnung der Dichteentwicklung nach dieser Methode ist sehr aufwendig. Ist die Lösung der Differentialgleichung für den kontinuierlichen Zustand bekannt, kann die Dichte nach einem einfacheren Verfahren ermittelt werden.

### Berechnung der Dichteentwicklung aus der Lösung der Differentialgleichung des kontinuierlichen Zustands

Gelingt es, die Lösung  $x = \hat{f}(x_0, t)$  der Zustandsdifferentialgleichung  $\dot{x} = f(x, t)$  als Funktion der Zeit  $t$  für einen gegebenen Anfangswert  $x_0$  zu finden, so hat man eine statische Abhängigkeit zwischen Anfangswert und Funktionswert. Dann kann die Dichtetransformation nach [WS86] zur Berechnung der Dichte  $f_x(x; t)$  verwendet werden. Diese lautet nach Erweiterung um das Argument  $t$ :

$$f_x(x; t) = \frac{1}{\left| \frac{\partial \hat{f}(x_0, t)}{\partial x_0} \right|_{x_0 = \hat{f}^{-1}(x, t)}} f_{x_0}(\hat{f}^{-1}(x, t)). \quad (4.5)$$

Die Verwendung dieser Gleichung zur Bestimmung der Dichte des kontinuierlichen Zustands ist mit deutlich geringerem Rechenaufwand verbunden als die Lösung der partiellen Differentialgleichung (4.2).

#### 4.1.2 Berechnung der stationären Dichte des kontinuierlichen Zustands aus Dichten von Kenngrößen der iterierten Abbildung

Mit der in Abschnitt 2.4 beschriebenen Modellierung kann unter Nutzung des Frobenius-Perron Operators [Göt98] mit einfachen Mitteln die stationäre Dichte der Zustände der iterierten Abbildung ermittelt werden. Dieser Abschnitt verfolgt die Berechnung der stationären Dichte des kontinuierlichen Zustands des Systems aus der stationären Dichte des kontinuierlichen Zustands der iterierten Abbildung. Aus der stationären Dichte lassen sich die Momente des kontinuierlichen Zustands berechnen. Speziell das erste Moment wird später in den gemittelten Modellen für chaotisch arbeitende Systeme benutzt.

Zur Berechnung wird die gemeinsame Dichte  $f_{xx_0}(x, x_0; t)$  benutzt, die aus der bedingten Dichte mit

$$f_{xx_0}(x, x_0; t) = f_{x|x_0}(x|x_0; t) f_{x_0}(x_0)$$

berechnet werden kann. Zwischen  $x_0$ ,  $x$  und  $t$  besteht ein funktionaler Zusammenhang. Dieser ist durch die Lösung der Differentialgleichung des kontinuierlichen Zustands  $x = \hat{f}(x_0, t)$  gegeben. Deshalb ist die bedingte Dichte ein Dirac-Impuls und die

gemeinsame Dichte kann wie folgt geschrieben werden:

$$f_{xx_0}(x, x_0; t) = \delta(x - \hat{f}(x_0, t))f_{x_0}(x_0) .$$

Die Dichte des kontinuierlichen Zustands ist eine Randdichte:

$$f_x(x; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \hat{f}(x_0, t))f_{x_0}(x_0)dx_0 . \quad (4.6)$$

Die gesuchte stationäre Dichte ist das Zeitmittel von Gl. (4.6):

$$f_x(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \hat{f}(x_0, t))f_{x_0}(x_0)dx_0 dt . \quad (4.7)$$

Gleichung (4.7) kann zur Berechnung der stationären Dichte für ein Ensemble von Trajektorien benutzt werden, bei dem  $\hat{f}(x_0, t)$  den Verlauf jeder einzelnen Trajektorie beschreibt. In hybriden Systemen gibt  $f_{x_0}(x_0)$  nicht die Dichte des Anfangswertes des Ensembles, sondern die Dichte des Anfangswertes der Trajektorie innerhalb eines Zyklusses oder eines Modus an. Der Endwert des Zyklusses oder Modus wird wieder durch die Dichte  $f_{x_0}(x_0)$  erfaßt und ist Anfangswert für den nächsten Zyklus bzw. Modus. Die Nutzung der Zyklusdauern, Bildung des Zeitmittels über die Zyklen und Vertauschung der Integrationsreihenfolge ergibt:

$$f_x(x) = \frac{1}{m_{1\tau_m}} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_0}(x_0) \int_0^{\tau_m(x_0)} \delta(x - \hat{f}(x_0, t))dt dx_0 .$$

Unter Nutzung der Substitutionen

$$u = x - \hat{f}(x_0, t) \quad t = \hat{f}^{-1}(x_0, x - u) \quad dt = -\frac{\partial \hat{f}^{-1}(x_0, x - u)}{\partial x} du$$

erhält man unter Berücksichtigung, daß die Dichte immer positiv ist:

$$f_x(x) = \frac{1}{m_{1\tau_m}} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_0}(x_0) \int_0^{\tau_m(x_0)} \left| \delta(u) \frac{\partial \hat{f}^{-1}(x_0, x - u)}{\partial x} du \right| dx_0 .$$

Ausrechnen des inneren Integrals unter Nutzung der Ausblendeigenschaft liefert für die stationäre Dichte des kontinuierlichen Zustands das Ergebnis:

$$f_x(x) = \frac{1}{m_{1\tau_m}} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_0}(x_0) \cdot \left| \frac{\partial \hat{f}^{-1}(x_0, x)}{\partial x} \right| dx_0 = \frac{1}{m_{1\tau_m}} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_0}(x_0) \cdot \frac{1}{\left| \frac{\partial \hat{f}(x_0, t)}{\partial t} \right|_{t=\hat{f}^{-1}(x_0, x)}} dx_0 . \quad (4.8)$$

Wird anstelle der Integration über eine Zyklusdauer die Aktivierungsdauer der Modi  $q = 1 \dots N$  benutzt, erhält man statt Gl. (4.8) den Ausdruck:

$$f_x(x) = \frac{1}{m_{1\tau_m}} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{x_{0i}}(x_{0i})}{\left| \frac{\partial \hat{f}(x_{0i}, t)}{\partial t} \right|_{t=\hat{f}^{-1}(x_{0i}, x)}} dx_{0i} = \frac{1}{m_{1\tau_m}} \sum_{i=1}^N f_{x_i}(x) m_{1\tau_i} . \quad (4.9)$$

In der Regel existiert nicht zu jedem beliebigen Wertepaar  $(x_0, x)$  ein Ergebnis  $\hat{f}^{-1}(x_0, x)$ . Für Wertepaare, für die kein solches Ergebnis existiert, ist der Integrand Null. Dadurch entstehen je nach Lösung der kontinuierlichen Differentialgleichung obere und/oder untere Integrationsgrenzen in Gl. (4.8) bis Gl. (4.9) oder das Integral ist zerlegbar in mehrere Teilintegrale.

### Beispiel

Die stationäre Dichte und die Momente des Spulenstroms eines DC-DC-Aufwärtswandlers im Current Programmed Mode sind für ganzzahlige Werte von  $-\frac{c_2}{c_1} \geq 1$  zu berechnen. Der Setztakt des Flip-Flops hat die konstante Dauer  $T$ . Der Wandler hat zwei diskrete Zustände  $q = 1 : \frac{di_L}{dt} = c_1$ ,  $q = 2 : \frac{di_L}{dt} = c_2$ . Die stationäre Dichte des Startwertes  $i_{L0}$  ist bekannt:

$$f_{i_{L0}}(i_L) = \begin{cases} -\frac{1}{c_2 T} & \text{für } i_{ref} + c_2 T \leq i_L \leq i_{ref} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (4.10)$$

Die Berechnung der stationären Dichte des kontinuierlichen Zustands erfolgt separat über beide Modi. Innerhalb der Modi sind die Anstiege unabhängig vom Startwert. Deshalb kann Gl. (4.8) oder Gl. (4.9) zur Berechnung verwendet werden.

- Modus  $q = 1$

In diesem Abschnitt gilt  $\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = c_1$ . Die Umkehrfunktion  $t = \hat{f}^{-1}(i_L, \xi)$  liefert Ergebnisse für  $\xi \leq i_L$ . Für  $\xi > i_L$  existieren keine Anfangswerte. Damit läßt sich die obere Integrationsgrenze variieren. Die Dichte des Startwertes ist Null für  $i_{L0} < i_{ref} + c_2 T$ . Deshalb kann die untere Integrationsgrenze ebenfalls verschoben werden und man erhält:

$$f_{i_{L1}}(i_L) = \frac{1}{m_{1\tau_1} c_1} \int_{i_{ref} + c_2 T}^{i_L} f_{i_{L0}}(\xi) d\xi = -\frac{2}{c_2 T} \int_{i_{ref} + c_2 T}^{i_L} f_{i_{L0}}(\xi) d\xi .$$

- Modus  $q = 2$

Die Dichte des kontinuierlichen Zustands im zweiten Abschnitt kann mit verschiedenen Varianten ermittelt werden. Die Berechnung kann über die Dichte des Startwertes im ersten Abschnitt, des Endwertes im zweiten Abschnitt oder die Dauer des zweiten Abschnittes berechnet werden. Die stationäre Dichte der Endwerte im zweiten Abschnitt ist identisch mit der der Startwerte im ersten Abschnitt. Am einfachsten ist daher die Berechnung über die Dichte der Endwerte des zweiten Abschnittes. Dann ist  $t = \hat{f}^{-1}(\xi, i_L)$  eine Funktion, die aus dem Wert  $i_L$  und dem Endwert  $\xi$  die benötigte Zeitspanne vom Erreichen des Wertes  $i_L$  bis zum Erreichen des Endwertes  $\xi$  bestimmt.  $\hat{f}^{-1}(\xi, i_L)$  liefert nur Ergebnisse für  $i_L \geq \xi$ . Für den zweiten Abschnitt erhält man die Teildichte:

$$f_{i_L2}(i_L) = -\frac{2}{c_2 T} \int_{i_{ref} + c_2 T}^{i_L} f_{i_L0}(\xi) d\xi.$$

Die Dichte des kontinuierlichen Zustands ist die nach Gl. (4.9) gewichtete Summe der Teildichten. Da beide Teildichten identisch sind, ist die gewichtete Summe ebenfalls identisch mit beiden Teildichten. Die Dichte des Spulenstroms ist [KMS04a]:

$$f_{i_L1}(i_L) = \begin{cases} \frac{2}{c_2^2 T^2} (i_L - i_{ref} - c_2 T) & \text{für } i_{ref} + c_2 T \leq i_L \leq i_{ref} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.11)$$

Aus Gl. (4.11) lassen sich die Momente des Spulenstroms berechnen:

$$m_{i_L l} = \frac{2}{c_2^2 T^2} \left( \frac{(i_{ref} + c_2 T)^{l+2} - i_{ref}^{l+2}}{(l+1)(l+2)} - \frac{c_2 T i_{ref}^{l+1}}{l+1} \right). \quad (4.12)$$

## 4.2 Stabilitätskriterium für chaotische Systeme

Bei hybriden Systemen mit natürlichem oder erzwungenem periodischen Verhalten diene die lokale Stabilität des Grenzzyklusses als Stabilitätskriterium. Zur Beurteilung konnten Größen, die die Stabilität des Fixpunktes der iterierten Abbildung beschreiben, wie die Escape Rate oder der Ljapunov-Exponent, verwendet werden. Hat ein System kein natürliches periodisches Verhalten und soll dieses auch nicht erzwungen werden, so ist das System lokal instabil. Aufgrund des globalen Attraktionscharakters sind chaotisch arbeitende Systeme jedoch global stabil. Das heißt mit fortschreitender

Iteration ziehen sich die Grenzen, innerhalb derer die Dichte des kontinuierlichen Zustands verschieden von Null ist, immer weiter auf das Gebiet des chaotischen Attraktors zurück. Liegt dieser innerhalb von durch die Applikation vorgegebenen Grenzen, so ist das chaotische System verwendbar.

So, wie die Stabilität von Fixpunkten/Grenzzyklen als Kriterium für die asymptotische Stabilität dient, kann für chaotische Systeme das Gebiet verwendet werden, in dem sich der Grenzzyklus aufhält.

Dieses Gebiet läßt sich mit Hilfe der stationären Dichte beschreiben. Ist die stationäre Dichte außerhalb eines vorgegebenen Gebietes Null, so erreicht der Grenzzyklus auch keinen Punkt außerhalb des vorgegebenen Intervalls.

Das bedeutet für die Dichten:

$$\exists \xi_{\min}, \xi_{\max} : f_{x(k)}(\xi_{\min} - \varepsilon) = 0, f_{x(k)}(\xi_{\max} + \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \forall k \geq k_i . \quad (4.13)$$

Dabei sind  $\xi_{\min}$  eine untere und  $\xi_{\max}$  eine obere Grenze, die ab dem Iterationsschritt  $k_i$  nicht mehr unter- bzw. überschritten werden.

Da die Handhabung der Dichten recht aufwendig ist, wird in der nachfolgenden Reglerparametrierung für chaotische Systeme mit Optimierungsverfahren die Betrachtung auf den Erwartungswert  $E(x)$  und die Varianz  $\sigma_x^2$  reduziert. Diese beiden Größen beschreiben das Verhalten der Dichten in erster Näherung.

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich zunächst mit der Modellierung des dynamischen Verhaltens.

### 4.3 Gemittelte Modelle für chaotisches Verhalten

#### Prinzip

Ziel dieses Abschnittes ist die Ableitung eines gemittelten Modells für chaotisch arbeitende hybride Systeme. Dieses Modell soll die Dynamik des Scharmittels beschreiben und eine ähnliche Form wie das einfache gemittelte Modell aus Abschnitt 2.2 haben:

$$E(\dot{x}, t) = f''(E(x, t)) .$$

Die Funktion  $f''$  wird in diesem Abschnitt abgeleitet.

Das Scharmittel eines Zeitsignals ist gegeben durch:

$$E(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x, t) dx .$$

Der gleitende zeitliche Mittelwert über die Dauer  $T$  ist

$$x_{m,T}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E(x, \tau) d\tau$$

bzw.:

$$x_{m,T}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x, \tau) dx d\tau . \quad (4.14)$$

Mit [WS86] und der Lösung der DGL des kontinuierlichen Teilsystems für einen Startwert  $x_0$ :  $x(t) = \hat{f}(x_0, t)$  kann die Dichte  $f_x(x, \tau)$  berechnet werden:

$$f_x(x, \tau) = \frac{1}{\left| \frac{\partial \hat{f}(x_0, \tau)}{\partial x_0} \right|_{x_0 = \hat{f}^{-1}(x, \tau)}} f_{x_0}(\hat{f}^{-1}(x, \tau)) .$$

Einsetzen in Gl. (4.14) liefert:

$$x_{m,T}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left| \frac{\partial \hat{f}(x_0, \tau)}{\partial x_0} \right|_{x_0 = \hat{f}^{-1}(x, \tau)}} f_{x_0}(\hat{f}^{-1}(x, \tau)) dx d\tau .$$

Der Anstieg des gemittelten kontinuierlichen Zustands

$$\frac{d}{dt} x_{m,T}(t) = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left| \frac{\partial \hat{f}(x_0, t+T)}{\partial x_0} \right|_{x_0 = \hat{f}^{-1}(x, t+T)}} f_{x_0}(\hat{f}^{-1}(x, t+T)) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left| \frac{\partial \hat{f}(x_0, t)}{\partial x_0} \right|_{x_0 = \hat{f}^{-1}(x, t)}} f_{x_0}(\hat{f}^{-1}(x, t)) dx \right]$$

ist identisch mit dem Mittelwert des Anstieges des kontinuierlichen Zustands

$$\frac{dx}{dt}_{m,T}(t) = \frac{1}{T} [E(x, t+T) - E(x, t)] ,$$

wie beim einfachen gemittelten Modell aus Abschnitt 2.2. Die Scharmittelung über die Ableitung des kontinuierlichen Zustands liefert:

$$E(\dot{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\hat{f}(x_0, t), t) f_{x_0}(x_0) dx_0 . \quad (4.15)$$

Hat die Zustandsgleichung des kontinuierlichen Zustands die spezielle Form

$$f(x, t) = c_1 x + c_2$$

(affines autonomes System), dann ist Gl. (4.15) wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{x_0}(x_0) dx_0 \equiv 1$$

identisch mit:

$$f(E(x, t)) .$$

Für den Erwartungswert kann das Modell

$$E(\dot{x}, t) = f''(E(x, t)) \quad (4.16)$$

mit

$$f''(E(x, t)) = \frac{1}{\tau_m} \sum_{i=1}^N \int_0^{\tau_i} f(E(x, \tau), \bar{q}(i), d) d\tau \quad (4.17)$$

verwendet werden.

Ist die Welligkeit der kontinuierlichen Zustände gering, so kann Gl. (4.16) zur näherungsweise Verhaltensbeschreibung verwendet werden.

Ist die Ableitung des gemittelten kontinuierlichen Zustands über einen Zyklus des diskreten Teilsystems in Näherung konstant, so läßt sich das gemittelte Verhalten der kontinuierlichen Zustände mit

$$E(\dot{x}, t) = \frac{1}{\tau_m} \sum_{k=1}^{k_m} \tau(k) f(E(x, t), \bar{q}(k), d) \quad (4.18)$$

modellieren. Dabei ist die Funktion  $f(E(x, t), \bar{q}(k), d)$  identisch mit Gl. (2.1), die die Dynamik des kontinuierlichen Zustands des allgemeinen hybriden Modells modelliert. Dieses gemittelte Modell beschreibt die Dynamik des Scharmittels  $E(\dot{x}, t)$ .

### Beispiel

Der Aufwärtswandler aus Abschnitt 4.1.2 wird mit ohmscher Last  $R$  modelliert. Die Ableitung der Stellgröße  $i_{ref}$  ist klein gegen den Anstieg  $c_1$  des Spulenstroms. Mit Gl. (4.12) erhält man für den Erwartungswert des Spulenstroms den Ausdruck:

$$E(i_L) = i_{ref} + \frac{1}{3} c_2 . \quad (4.19)$$

Die Modellierung des Verhaltens der Ausgangsspannung erfolgt, wie beschrieben, durch Erwartungswertbildung. Für die gemittelte Schalterspannung und den gemit-

telten Diodenstrom des Aufwärtswandlers gilt:

$$u_{Sm,T} = (1 - D)u_{am,T}$$

$$i_{Dm,T} = (1 - D)i_{Lm,T} .$$

Die Differentialgleichungen für die gemittelten kontinuierlichen Zustände  $i_{Lm,T}$  und  $u_{am,T}$  sind gleich den gemittelten Differentialgleichungen:

$$\frac{di_L}{dt} m,T = U_e - (1 - D)u_{am,T} \tag{4.20}$$

$$\frac{du_a}{d\tau} m,T = (1 - D)i_{Lm,T} - \frac{1}{R}u_{am,T} . \tag{4.21}$$

Da wegen Gl. (4.19)  $\frac{di_L}{dt} m,T = \frac{di_{ref}}{dt} m,T$  gilt, kann Gl. (4.20) nach  $1 - D$  umgestellt werden

$$1 - D = \frac{U_e - L\dot{i}_{Lm,T}}{u_{am,T}}$$

und in Gl. (4.21) eingesetzt werden. Dann erhält man für  $u_{am,T}$  die Differentialgleichung:

$$u_{am,T} \cdot \frac{du_a}{dt} m,T + \frac{1}{R}(u_{am,T})^2 = \left( i_{ref} + \frac{1}{3}c_2 \right) \left( U_e - L \frac{di_{ref}}{dt} m,T \right) . \tag{4.22}$$

Bild 4.1 zeigt den Vergleich der Zeitverläufe von Spulenstrom und Ausgangsspannung

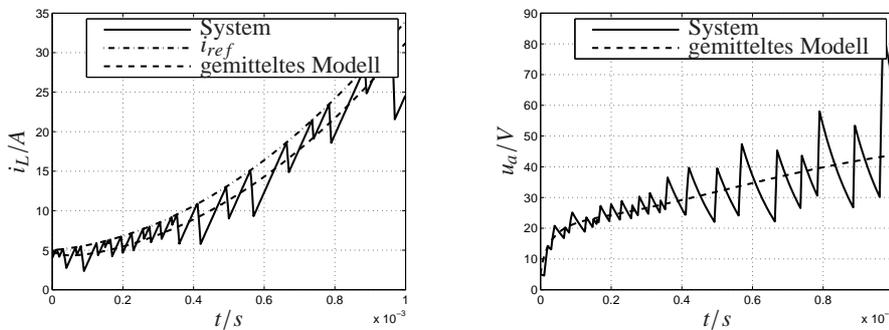


Bild 4.1: Vergleich der Zeitverläufe von Spulenstrom und Ausgangsspannung des gemittelten Modells mit denen des Systems.

des vorgestellten gemittelten Modells mit denen des Systems. Die Parametrierung wurde bewußt so gewählt, daß eine große Welligkeit der kontinuierlichen Zustände auftritt und der Anstieg  $c_{ref}$  in der Größenordnung von  $c_1$  liegt. Wie aus dem Bild zu erkennen ist, spiegelt das gemittelte Modell auch für diesen für die Modellierung mit gemittelten Modellen ungünstigen Parametersatz das Systemverhalten im Mittel wieder.

## 4.4 Bestimmung von Regler- und Streckenparametern mit Optimierungsverfahren

Dieser Abschnitt behandelt die Bestimmung von Regler- und Streckenparametern hybrider Systeme zum schnellen Erreichen des stationären Zustands. Dazu wird zuerst ein geeignetes Gütefunktional vorgestellt. Anschließend werden an einem Beispiel Regler- und Streckenparameter aufgeführt, die als Optimierungsparameter geeignet sind. Abschließend erfolgt die Darstellung und Wertung der im Beispiel erreichten Ergebnisse. Als Beispiel dient ein mit einem PI-Regler geregelter Aufwärtswandler im Current Programmed Mode.

### 4.4.1 Gütefunktional

Klassische Reglerentwürfe basieren auf der Stabilisierung von Fixpunkten oder periodischen Zyklen. Bei nichtperiodisch arbeitenden Systemen ist der Reglerentwurf nach klassischen Verfahren nur dann möglich, wenn durch die Reglerparametrierung periodisches Verhalten erzwungen werden kann. Dies ist bei manchen Systemen z.B. aus Gründen der elektromagnetischen Verträglichkeit von Nachteil und bei einigen Systemen, bei denen die Strecke vorgegeben ist, nicht möglich. Ein Beispiel dafür ist der DC-DC-Wandler im Current Programmed Mode nach Abschnitt 2.1. Ist das Eingangssignal des äußeren Reglers die Ausgangsspannung  $u_a$  des Wandlers und das Stellsignal der Referenzstrom  $i_{ref}$ , hat der Regler keinen Einfluß auf das periodische bzw. chaotische Verhalten der Strecke, welches von den Anstiegen  $c_1$  und  $c_2$  bestimmt wird. Eine Möglichkeit zum Reglerentwurf bietet die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Mittelung, deren Ergebnis ein Modell mit stabilem Fixpunkt auch für nichtperiodische Systeme ist. Dieses Modell erlaubt die Anwendung klassischer Entwurfsverfahren. In diesem Abschnitt wird eine Entwurfsmethode vorgestellt, die auch dann auf nichtperiodisch arbeitende Systeme anwendbar ist, wenn die zur Anwendung gemittelter Modelle notwendigen Näherungen nicht erfüllt sind.

Das Gütefunktional verwendet statistische Kenngrößen, da diese die einzige Möglichkeit zur Beschreibung des Verhaltens des kontinuierlichen Zustands nichtperiodischer Systeme darstellen. Diese Kenngrößen werden zu einem vorher festgelegten

Umschalt ereignis zu jedem Zyklus berechnet. Die Berechnung dieser Zustandswerte erfolgt mit der iterierten Abbildung wie in Abschnitt 2.4 beschrieben.

Das Kriterium soll sowohl den Einschwingvorgang als auch den stationären Zustand bewerten. Ein Kriterium, das diese Forderungen erfüllt, ist:

$$J = \xi_S \left( E(|\bar{\varepsilon}_S|^2) \right) + \sum_{m=1}^N p^m \left( E(|\bar{\varepsilon}(m)|^2) - E(|\bar{\varepsilon}_S|^2) \right). \quad (4.23)$$

Darin bewertet die monotone Funktion  $\xi_S \left( E(|\bar{\varepsilon}_S|^2) \right)$  die stationäre Abweichung  $\bar{\varepsilon}_S(m) = \bar{\mathbf{x}}_S(m) - \mathbf{x}_{ref}$  des gemittelten stationären Zustands vom Sollwert. Die Summe bewertet den Einschwingvorgang in den stationären Zustand unter Abzug der stationären Abweichung vom Sollwert. Die Differenzbildung ist notwendig, damit das Kriterium auch bei verbleibender stationärer Abweichung für  $N \rightarrow \infty$  konvergiert. Außerdem erlaubt diese Form des Kriteriums die separate Bewertung von Einschwingvorgang und stationärer Abweichung.  $\bar{\varepsilon}(m) = \bar{\mathbf{x}}(m) - \mathbf{x}_{ref}$  ist die Abweichung vom Sollwert während des Einschwingvorgangs.  $p$  kann einerseits benutzt werden, um Konvergenz des Kriteriums für  $N \rightarrow \infty$  zu sichern ( $p < 1$ ). Andererseits kann durch eine geeignete Wahl von  $p$  eine Wichtung der Abweichung so erfolgen, daß langsame Einschwingvorgänge deutlich stärker bewertet werden als schnelle Einschwingvorgänge. Für ( $p \geq 1$ ) ist die Konvergenz des Kriteriums für  $N \rightarrow \infty$  nicht gesichert. Da der Einschwingvorgang jedoch nach endlicher Zeit abgeschlossen ist, kann ( $p \geq 1$ ) in Verbindung mit einer endlichen Anzahl  $N$  von Iterationen verwendet werden, wenn zum Vergleich verschiedener Parametrierungen der selbe Wert  $N$  benutzt wird.

Das vorgestellte Kriterium ist verwandt mit der häufig für Optimierungsaufgaben verwendeten Bolza-Form [FR94]

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbf{x}(t_e)^T \mathbf{S} \mathbf{x}(t_e) + \int_0^{t_e} (\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}_x \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt ,$$

die für die Bestimmung einer einzelnen Trajektorie eines kontinuierlichen Systems benutzt wird. Die Bolza-Form bricht ebenfalls nach einer endlichen Beobachtungszeit ab und bewertet sowohl die stationäre Abweichung als auch den Einschwingvorgang bis zum Zeitpunkt  $t_e$ .

### 4.4.2 Optimierungsbeispiel

Für den Aufwärtswandler im Current Programmed Mode nach Abschnitt 2.1 sind die Parameter  $k_I$  und  $k_P$  eines PI-Reglers

$$\frac{di_I}{dt} = k_I(u_a - u_{a,ref}) \quad (4.24)$$

$$i_{ref} = i_I + k_P(u_a - u_{a,ref}) \quad (4.25)$$

zu dimensionieren. Die Parameter des DC-DC-Wandlers sind  $U_e = 4\text{V}$ ,  $L = 100\mu\text{H}$ ,  $C = 10\mu\text{F}$ ,  $R = 60\Omega$ ,  $T = 10\mu\text{s}$ ,  $u_{soll} = 15\text{V}$ . Die Parameter sind aus Gründen der Darstellbarkeit der statistischen Kenngrößen so gewählt, daß der kontinuierliche Zustand größeren Schwankungen unterliegt. Das Verhalten des geregelten Wandlers läßt sich folgendermaßen mit dem allgemeinen Modell aus Abschnitt 2.1 modellieren. Das genaue Modell für den unregulierten Wandler ist in Abschnitt 2.1 dargestellt. Gleichung (4.24) ist eine kontinuierliche Zustandsgleichung. Das kontinuierliche Teilsystem des Wandlers ist um diese Gleichung zu erweitern. Damit hat der geregelte Wandler drei kontinuierliche Zustandsvariablen  $\mathbf{x} = (i_L, u_a, i_I)^T$ . Gleichung (4.25) wird zur Ereignisgeneration verwendet und ist in den Ereignisgenerator einzubinden. Der vollständige hybride Systemzustand ist:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} u_a \\ i_L \\ i_I \\ q \\ \tau \end{pmatrix}.$$

Die Zustandsfolge wird durch die iterierte Abbildung

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_a(m+1) \\ \bar{i}_L(m+1) \\ \bar{i}_I(m+1) \\ \bar{\tau}_m(m+1) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{u}_a(m) \\ \bar{i}_L(m) \\ \bar{i}_I(m) \\ \bar{\tau}_m(m) \end{pmatrix}$$

generiert.

Zunächst sind  $k_P$  und  $k_I$  zu bestimmen. Weiterhin sind folgende Begrenzungen zu berücksichtigen:

Ein Wandler besitzt stets eine Strombegrenzung zum Schutz der Bauteile. Beim Current Programmed Mode ist die Strombegrenzung eine Stellgrößenbegrenzung  $i_{ref} \leq i_{ref,max}$ . Der Integrator des PI-Reglers hat eine obere und untere Begrenzung seines Ausgangswerts  $i_{I,min} \leq i_I \leq i_{I,max}$ . Die Begrenzung des Ausgangswerts des Integrators wird durch das in Bild 4.2 dargestellte Modell modelliert. Bei Erreichen der oberen Be-

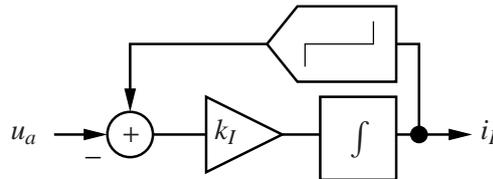


Bild 4.2: Modell der Begrenzung des Ausgangswerts des Integrators.

grenzung wird diese sofort wieder verlassen, wenn das Eingangssignal negativ wird. Bei Erreichen der unteren Begrenzung arbeitet das System sofort als normaler Integrator weiter, wenn das Eingangssignal positiv wird.

Sind die genannten Begrenzungen im Entwurf der Reglerrealisierung modifizierbar, so können diese ebenfalls als Optimierungsparameter angesehen werden.

#### 4.4.3 Ergebnisse

Zur Optimierung wird der in Abschnitt 3.4.1 beschriebene Algorithmus verwendet, der lokale Minima findet. Da hierbei die wiederholte Berechnung statistischer Kenngrößen notwendig ist, ist der erforderliche Rechenaufwand sehr groß. Mit der Wahl der Wandlerparametrierung nach Abschnitt 4.4.2 ist der Einschwingvorgang verhältnismäßig rasch abgeschlossen, so daß für diese Parametrierung die Optimierung mit akzeptablem Rechenaufwand durchführbar ist. Für den geregelten Wandler ist der Einschwingvorgang nach 200 Zyklen mit Sicherheit abgeschlossen. Deshalb wird  $N = 200$  gewählt, um den gesamten Einschwingvorgang zu bewerten. Die Methode scheint momentan nicht für nichtperiodische Systeme geeignet, die mit Regelung mehrere hundert Zyklen bis zum Erreichen des stationären Zustands benötigen.

### Klassischer Reglerentwurf

Zu Vergleichszwecken erfolgt zunächst der Reglerentwurf mit dem gemittelten Modell nach Abschnitt 4.3. Die Ergebnisse dieses Entwurfes dienen gleichzeitig als Startparametrierung für die nachfolgenden Optimierungen. Die Linearisierung und Laplace-Transformation führt auf die Übertragungsfunktion:

$$\frac{U_a}{I_{ref}} = R \frac{U_e - sL \frac{U_a^2}{RU_e}}{U_{aA}(sCR + 2)} .$$

Zur Dimensionierung der Reglerparameter wird das Phasenrandverfahren verwendet. Ein Phasenrand von  $60^\circ$  bei hoher Durchtrittsfrequenz der Schleifenverstärkung ergibt sich mit den Parametern  $k_P = 0.8 \frac{\text{A}}{\text{V}}$  und  $k_I = 3000 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$ . Die Begrenzungsparameter  $i_{ref,max}$ ,  $i_{I,min}$  und  $i_{I,max}$  sind mit Entwurfsmethoden für affine Systeme nicht dimensionierbar. Diese werden zu  $i_{ref,max} = 5\text{A}$ ,  $i_{I,min} = 0\text{A}$  und  $i_{I,max} = 3\text{A}$  gewählt. Bild 4.3

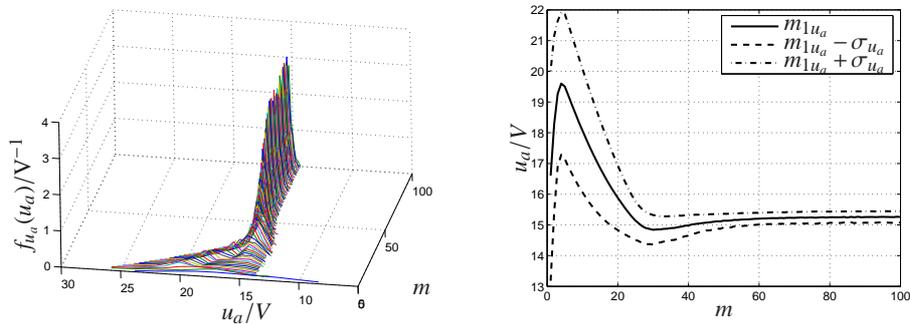


Bild 4.3: Dichte und Mittelwert der Ausgangsspannung über dem Iterationsschritt, Parametrierung mit Phasenrandverfahren.

zeigt die Verläufe der Dichte, des Mittelwerts und der Standardabweichung der Ausgangsspannung über dem Iterationsschritt  $m$  der iterierten Abbildung. Der kontinuierliche Zustand kann nach etwa 60 Zyklen als stationär angesehen werden. In dem Bild ist ein starkes Überschwingen der Ausgangsspannung zu erkennen. Die Ursache hierfür liegt darin, daß vorübergehend eine der im Abschnitt 4.4.2 genannten Begrenzungen erreicht wird.

**Optimierung 1**

Ausgehend von der Dimensionierung nach dem Phasenrandverfahren werden die Parameter  $k_P$  und  $k_I$  bestimmt. Die Parameter des Gütefunktions sind  $p = 1$  und  $\xi_S(u_a) = 500u_a$ . Der nach der Optimierung erhaltene Parametersatz ist  $k_P = 0.45 \frac{\text{A}}{\text{V}}$ ,  $k_I = 3175 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$ . Bild 4.4 stellt die Verläufe der Dichte, des Mittelwerts und der Standardabweichung

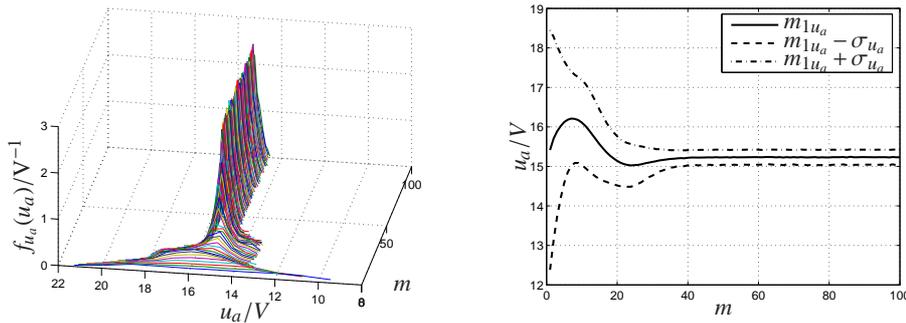


Bild 4.4: Dichte und Mittelwert der Ausgangsspannung über dem Iterationsschritt, Optimierung 1.

der Ausgangsspannung über dem Iterationsschritt  $m$  der iterierten Abbildung für die erste Optimierung dar. Der stationäre Zustand wird nach etwa 40 Zyklen erreicht. Das Überschwingen ist deutlich geringer geworden.

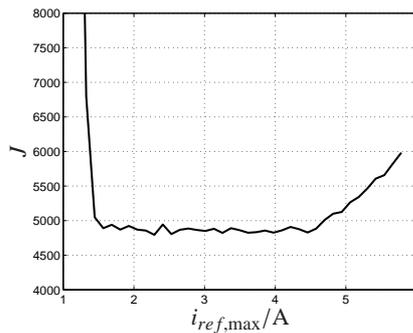


Bild 4.5: Abhängigkeit des Gütefunktions von der Begrenzung des Referenzstroms.

Bild 4.5 zeigt die Abhängigkeit des Gütefunktions von der Begrenzung  $i_{ref,max}$  des Referenzstroms. Für  $i_{ref,max} < 1.5\text{A}$  wird der Sollwert im stationären Zustand nicht mehr erreicht. Diese Begrenzung ließe sich auch von Hand ausrechnen. Für  $i_{ref,max} >$

4.5A steigt das Gütefunktional ebenfalls wieder an. Ursache dafür ist ein stärkeres Überschwingen einiger Trajektorien. Eine vernünftige Wahl des Begrenzungsstromes liegt daher bei  $1.5\text{A} \leq i_{ref,max} \leq 4.5\text{A}$ .

## Optimierung 2

In der zweiten Variante werden zusätzlich die Grenzen des Ausgangswerts des Integrators variiert. Der nach der Optimierung erhaltene Parametersatz ist  $k_P = 0.93 \frac{\text{A}}{\text{V}}$ ,  $k_I = 10670 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$ ,  $i_{I,min} = 1.2\text{A}$  und  $i_{I,max} = 1.5\text{A}$ . Die Verläufe der Dichte, des Mittelwerts und

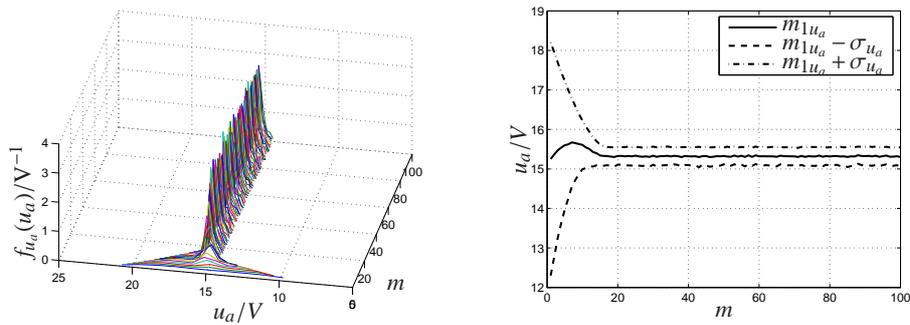


Bild 4.6: Dichte und Mittelwert der Ausgangsspannung über dem Iterationsschritt, Optimierung 2.

der Standardabweichung der Ausgangsspannung über dem Iterationsschritt  $m$  der iterierten Abbildung zeigt Bild 4.6. Bei dieser Parametrierung ist der stationäre Zustand nach weniger als 20 Zyklen erreicht.

Eine genauere Analyse des Ergebnisses zeigt, daß der Integratorausgang im stationären Betrieb stets in einer der beiden Begrenzungen liegt. Der Integrator arbeitet nur während der transienten Phase. Bei Entfernung der Begrenzungen des Integratorausgangs wird das System instabil. Ergebnis dieser Optimierung ist im Prinzip ein P-Regler. Die Ergebnisse einer solchen Optimierung sind stets in Bezug auf die tatsächliche Verwendbarkeit in der späteren Applikation zu prüfen.

## 4.5 Impedanzgenerierung mit hybriden Systemen der Leistungselektronik

Dieses Kapitel stellt eine universelle DC/DC- und AC/DC-Wandlerarchitektur vor. Die Wandlerarchitektur kann bipolare Eingangssignale in eine unipolare Ausgangsspannung wandeln und ermöglicht dabei bidirektionalen Energiefluß. Der bidirektionale Energiefluß ermöglicht in Kombination mit einer geeigneten Ansteuerung die Nachbildung beliebiger Impedanzen am Eingangsklemmenpaar des Wandlers.

### 4.5.1 Universelle Wandlerstruktur

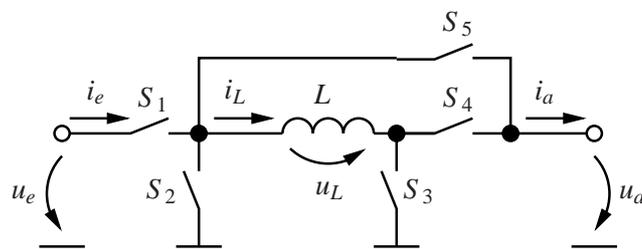


Bild 4.7: Schaltung Universalwandler.

Bild 4.7 zeigt die Struktur des Wandlers. Das Schaltnetzwerk erlaubt einen Vorzeichenwechsel der Spulenspannung  $u_L$  bei jedem beliebigen Wert und Vorzeichen der Eingangsspannung  $u_e$ . Aufgrund der 5 existierenden Schalter kann der diskrete Zustand 32 verschiedene Werte annehmen, von denen 6 Modi mit unterschiedlicher Funktion  $f(\mathbf{x}, q, \mathbf{d})$  sinnvoll sind. Tabelle 4.1 zeigt diese Modi. Die Struktur erlaubt die Nachbildung aller konventionellen Drosselwandler.

Im Betrieb als Aufwärtswandler ist die Struktur zwischen  $q = 1$  und  $q = 3$  zyklisch umzuschalten. Dabei entspricht  $q = 1$  dem geschlossenen und  $q = 3$  dem geöffneten Schalter im Aufwärtswandler im nichtlückenden Betrieb.

Der Abwärtswandler entsteht durch zyklisches Umschalten zwischen den Modi  $q = 3$  und  $q = 4$ .  $q = 3$  entspricht dem Zustand des geschlossenen und  $q = 4$  dem des geöffneten Schalters im Abwärtswandler.

Der invertierende Auf-/Abwärtswandler entsteht durch zyklisches Umschalten zwischen den Modi  $q = 1$  und  $q = 5$ .  $q = 1$  entspricht dem geschlossenen und  $q = 5$  dem

$q$	$i_L$	$i_a$	$i_e$	$S_5 \dots S_1$
0	$i_L = 0$	$i_a = 0$	$i_e = 0$	00000
1	$\dot{i}_L = \frac{u_e}{L}$	$i_a = 0$	$i_e = i_L$	00101
2	$\dot{i}_L = 0$	$i_a = 0$	$i_e = 0$	00110
3	$\dot{i}_L = \frac{u_e - u_a}{L}$	$i_a = i_L$	$i_e = i_L$	01001
4	$\dot{i}_L = \frac{-u_a}{L}$	$i_a = i_L$	$i_e = 0$	01010
5	$\dot{i}_L = \frac{u_a}{L}$	$i_a = -i_L$	$i_e = 0$	10100

Tabelle 4.1: Verschiedene Modi des Universalwandlers

geöffneten Schalter im invertierenden Auf-/Abwärtswandler.

Neben den drei bekannten Wandlertypen läßt sich noch ein weiterer Wandler, der nichtinvertierende Auf-/Abwärtswandler durch diese Struktur realisieren. Dazu ist der diskrete Zustand zyklisch zwischen den Werten  $q = 1$  und  $q = 4$  umzuschalten. Erfolgt die Energieübertragung vom Eingang zum Ausgang, so wird im Zustand  $q = 1$  Energie vom Eingang zur Induktivität übertragen und im Zustand  $q = 4$  Energie aus der Induktivität zum Ausgang übertragen. Dabei kehrt sich die Polarität von  $u_L$  bei gleicher Polarität von  $u_e$  und  $u_a$  beim Umschalten zwischen beiden Modi unabhängig vom Wert von  $u_e$  bzw.  $u_a$  um. Der Wandler kann zur Generierung von Ausgangsspannungen genutzt werden, die kleiner und größer als die positive Eingangsspannung sind.

Tabelle 4.1 enthält noch zwei weitere Modi, die in den oben genannten Beispielen nicht auftreten. Bei  $q = 0$  sind alle Schalter geöffnet. Die Induktivität ist stromlos. In den Modus  $q = 0$  kann aus den anderen Modi nur zu dem Zeitpunkt gewechselt werden, wo  $i_L = 0$  gilt.  $q = 0$  kann zur Nachbildung des lückenden Betriebes der einzelnen Wandlertypen genutzt werden. Im Modus  $q = 2$  ist die Induktivität kurzgeschlossen. Es gilt  $\frac{di_L}{dt} = 0$ . Dieser Modus kann zur Verbesserung des Transientverhaltens des Wandlers genutzt werden. Übersteigt der Spulenstrom während der transienten Phase vorübergehend den Sollwert, so kann statt der Einspeicherphase in die Induktivität der Modus  $q = 2$  benutzt werden, um den Spulenstrom auch bei hohem Tastverhältnis nicht weiter ansteigen zu lassen. Die Nutzung dieses Modus erfordert einen speziellen Regler, der jedoch nicht Bestandteil dieser Arbeit ist.

Wird der Modus  $q = 0$  nicht benutzt, so kann aufgrund der fremdgesteuerten Schal-

ter Energie sowohl vom Eingang zum Ausgang als auch vom Ausgang zum Eingang transportiert werden. Diese Eigenschaft ist eine wesentliche Voraussetzung zur Nachbildung beliebiger Impedanzen mit dem Wandler. Eine weitere Voraussetzung dafür ist das Vorhandensein eines entsprechenden Energiespeichers am Ausgang des Wandlers.

#### 4.5.2 Quasistationäres Eingangsverhalten

Im stationären Fall ist die gemittelte Spannung an der Induktivität Null, d.h.:

$$\int_0^{\tau_m} u_L(\tau) d\tau = 0. \quad (4.26)$$

Zur Ansteuerung des Wandlers existieren zwei Möglichkeiten:

##### Zeitsteuerung

Der Wandler arbeitet im nichtlückenden Betrieb. Damit hat das System zwei Zustände, zwischen denen zeitgesteuert geschaltet wird. Die Aktivierungsdauer des Modus  $q = i$  nach Tab. 4.1 ist die Zeitspanne  $\tau_i$ .

Ein- und Ausgangsspannung seien über einen Zyklus in Näherung konstant. Dann können durch Einsetzen der stückweise konstanten Ein- und Ausgangsspannungen in Gl. (4.26) folgende Beziehungen im stationären Betrieb abgeleitet werden:

- Aufwärtswandler:  $u_e(\tau_1 + \tau_3) = u_a\tau_3$ .
- Abwärtswandler:  $u_e\tau_3 = u_a(\tau_3 + \tau_4)$ .
- Inverter:  $u_e\tau_1 = -u_a\tau_5$ .
- nichtinvertierender Auf-/Abwärtswandler:  $u_e\tau_1 = u_a\tau_4$ .

Wird eine Spannung konstant gehalten, entspricht das stationäre Verhalten des Wandlers am anderen Klemmenpaar dem einer Spannungsquelle. Der Wert der Spannung läßt sich durch Variation der entsprechenden Aktivierungsdauern stellen.

##### Ereignissteuerung

Hier wird ein Zweipunktregler mit konstanter Hysterese  $\Delta i$  zur Ereignisgenerierung verwendet: Die Umschaltsschwellen zwischen den Modi liegen bei  $i_{Lm,\tau_m} + \frac{1}{2}\Delta i$  und

$i_{Lm,\tau_m} - \frac{1}{2}\Delta i$ , so daß der Spulenstrom im stationären Betrieb zwischen beiden Umschaltsschwellen liegt.  $\Delta i$  ist konstant. Die Stellgröße ist  $i_{Lm,\tau_m}$ . Für die verschiedenen Wandlertypen stellen sich folgende mittleren Eingangsströme ein:

- Aufwärtswandler:  $i_{em,\tau_m} = i_{Lm,\tau_m}$ .
- Abwärtswandler:  $i_{em,\tau_m} = \frac{u_a}{u_e} i_{Lm,\tau_m}$ .
- Inverter:  $i_{em,\tau_m} = \frac{u_a}{u_a - u_e} i_{Lm,\tau_m}$ .
- nichtinvertierender Auf-/Abwärtswandler:  $i_{em,\tau_m} = \frac{u_a}{u_a + u_e} i_{Lm,\tau_m}$ .

Beim Aufwärtswandler entspricht das gemittelte Eingangsverhalten dem einer Stromquelle. Bei den anderen drei Wandlertypen kann durch eine geeignete von  $u_a$  und  $u_e$  abhängige Steuerung von  $i_{Lm,\tau_m}$  das Verhalten einer Stromquelle am Eingang nachgebildet werden. Der Strom läßt sich durch Variation von  $i_{Lm,\tau_m}$  stellen.

### 4.5.3 Generierung von Impedanzen

Beliebige Impedanzen oder UI-Kennlinien lassen sich durch spannungsgesteuerte Stromquellen oder stromgesteuerte Spannungsquellen nachbilden, Bild 4.8.

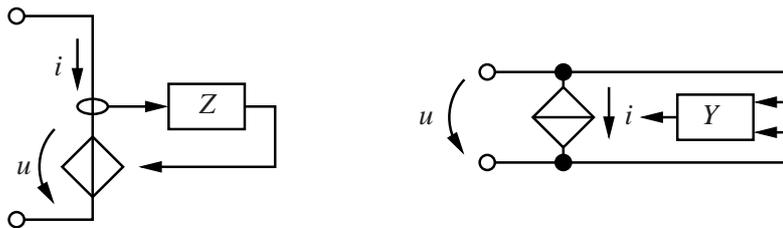


Bild 4.8: Stromgesteuerte Spannungsquelle und spannungsgesteuerte Stromquelle.

Abschnitt 4.5.2 zeigte, daß der Wandler bei konstanter Ausgangsspannung einseitig bei Zeitsteuerung eine gesteuerte Spannungsquelle nachbildet und bei Stromsteuerung eine gesteuerte Stromquelle nachbilden kann. Die Generierung von Impedanzen ist demnach bei Zeitsteuerung durch Nachbildung einer stromgesteuerten Spannungsquelle und bei Stromregelung durch Nachbildung einer spannungsgesteuerten Stromquelle möglich.

**Zeitsteuerung**

Wird der Wandler mit Zeitsteuerung betrieben, so lassen sich durch Messung des Eingangstroms  $i_{em,\tau_m}$  und von diesem abhängige Steuerung Reihenschaltungen beliebiger Impedanzen nachbilden. Einige Beispiele für nachbildbare Impedanzen sind:

- Widerstand  $R$ :  $u_e = i_e \cdot R$ .
- Kapazität  $C$ :  $i_e = C \frac{du_e}{dt}$ .
- Induktivität  $L$ :  $u_e = L \frac{di_e}{dt} m, \tau_m$ .
- negativer Widerstand  $-R$ :  $u_e = -i_e \cdot R$ .
- negative Kapazität  $-C$ :  $i_e = -C \frac{du_e}{dt}$ .
- negative Induktivität  $-L$ :  $u_e = -L \frac{di_e}{dt} m, \tau_m$ .

Bei Zeitsteuerung setzt sich der Block  $Z$  in Bild 4.8 links aus dem Wandler und dem System zur Generierung der Stellgröße des Wandlers zusammen. Da bei Zeitsteuerung jeweils zwei Stellgrößen (Aktivierungsdauern) existieren, ist die allgemeine Lösung zur Nachbildung von Impedanzen nicht eindeutig. Diese wird erst eindeutig, wenn ein spezielles Steuerschema, wie Pulsweitenmodulation oder Pulsfrequenzmodulation spezifiziert wird. Um an dieser Stelle allgemein zu bleiben, werden die Bedingungen nach dem nachzubildenden Bauelementeparameter umgestellt angegeben. Durch Einsetzen dieser UI-Relationen in die Gleichungen aus Abschnitt 4.5.2 erhält man für die Nachbildung der linearen Impedanzen die Ausdrücke in Tab. 4.2.

Wandlertyp	Widerstand	Induktivität	Kapazität
Aufwärts	$R = \frac{U_a}{i_e} \frac{\tau_3}{\tau_1 + \tau_3}$	$L = \frac{U_a}{\frac{di_e}{dt}} \frac{\tau_3}{\tau_1 + \tau_3}$	$C = \frac{i_e}{U_a \frac{d}{dt} \left( \frac{\tau_3}{\tau_1 + \tau_3} \right)}$
Abwärts	$R = \frac{U_a}{i_e} \left( 1 + \frac{\tau_4}{\tau_3} \right)$	$L = \frac{U_a}{\frac{di_e}{dt}} \left( 1 + \frac{\tau_4}{\tau_3} \right)$	$C = \frac{i_e}{U_a \frac{d}{dt} \left( \frac{\tau_4}{\tau_3} \right)}$
Inverter	$R = -\frac{U_a}{i_e} \frac{\tau_5}{\tau_1}$	$L = -\frac{U_a}{\frac{di_e}{dt}} \frac{\tau_5}{\tau_1}$	$C = -\frac{i_e}{U_a \frac{d}{dt} \left( \frac{\tau_5}{\tau_1} \right)}$
Auf-/Abwärts	$R = \frac{U_a}{i_e} \frac{\tau_4}{\tau_1}$	$L = \frac{U_a}{\frac{di_e}{dt}} \frac{\tau_4}{\tau_1}$	$C = \frac{i_e}{U_a \frac{d}{dt} \left( \frac{\tau_4}{\tau_1} \right)}$

Tabelle 4.2: Nachbildung verschiedener Impedanzen durch zeitgesteuerte Wandler.

## Beispiele

1. Mit dem Aufwärtswandler soll ein Widerstand  $R$  nachgebildet werden. Aus der angegebenen Gleichung  $R = \frac{U_a}{i_e} \frac{\tau_3}{\tau_1 + \tau_3}$  ist ersichtlich, daß sich die Pulsweitenmodulation mit dem Tastverhältnis  $d = \frac{\tau_3}{\tau_1 + \tau_3}$  sehr gut eignet. Umstellen nach der Stellgröße liefert den Generationsmechanismus

$$d = \frac{R}{U_a} \cdot i_e$$

zur Nachbildung des Widerstandes  $R$  mit dem Aufwärtswandler.

2. Mit dem Inverter soll eine Induktivität  $L$  nachgebildet werden. Aus der Gleichung  $L = -\frac{U_a}{\frac{di_e}{dt}} \frac{\tau_5}{\tau_1}$  sieht man, daß die Pulsfrequenzmodulation mit konstanter Aktivierungsdauer  $\tau_1$  und variabler Aktivierungsdauer  $\tau_5$  sehr gut geeignet ist. Umstellen nach der Stellgröße liefert den Generierungsmechanismus

$$\tau_5 = -\tau_1 \frac{L}{U_a} \frac{di_e}{d\tau}$$

zur Nachbildung der Induktivität  $L$  mit dem Inverter.

3. Mit dem Abwärtswandler ist die negative Kapazität  $-|C|$  nachzubilden. Nach der Gleichung  $-|C| = \frac{i_e}{U_a \frac{d}{dt} \left( \frac{\tau_4}{\tau_3} \right)}$  ist die Pulsfrequenzmodulation mit konstanter Aktivierungsdauer  $\tau_3$  und variabler Aktivierungsdauer  $\tau_4$  gut zur Steuerung geeignet. Umstellen der Gleichung liefert die Stellgrößengenerierung

$$\tau_4 = \tau_4(0) - \frac{\tau_3 |C|}{U_a} \int_0^t i_e(\tau) d\tau$$

zur Nachbildung der Kapazität  $C$  mit dem Abwärtswandler.

Die Aktivierungsdauern können z.B. durch Wert-Zeit-Umsetzer nach Bild 3.13 oder Bild 3.14 generiert werden.

Zur Nachbildung einer Impedanz ist abhängig von der momentanen Eingangsspannung einer der angegebenen Wandlertypen zu verwenden und je nach Variation von  $u_e$  zwischen den Wandlertypen umzuschalten. Die Beispiele zeigen, daß es dabei zugunsten einer einfachen Stellgrößengenerierung durchaus sinnvoll sein kann, abhängig von

der Wandlerarchitektur zwischen Pulsweitenmodulation und Pulsfrequenzmodulation umzuschalten.

Unter Nutzung der Beziehungen in Tab. 4.2 lassen sich sowohl positive als auch negative Impedanzen generieren.

Die Reihenschaltung von Impedanzen erhält man durch Addition der entsprechenden Ausdrücke für die Teilspannungen. Darüberhinaus lassen sich beliebige nichtlineare statische und dynamische UI-Kennlinien nachbilden.

Voraussetzung für die Nachbildung ist, daß der Wandler quasistationär arbeitet, d.h., daß die Änderung von  $i_e$  und  $u_e$  innerhalb eines Zyklusses gering ist und das dynamische Verhalten des Wandlers durch einen zusätzlichen Regler ausreichend bedämpft ist. Diese Methode wurde in [Val07] zur Blindleistungskompensation am Nabendynamo von Fahrrädern benutzt. Als Energiespeicher zur Generierung von Blindleistung mit dem Wandler diente der durch den Dynamo zu ladende Akku.

An den Eingangsspannungen, die ein Umschalten zwischen den verschiedenen Architekturen erfordern, ist immer eine Aktivierungsdauer Null und daher immer der Modus aktiv, den die Wandlertypen, zwischen denen umgeschaltet wird, gemeinsam haben. So gilt z.B. für den Abwärtswandler bei  $u_e = U_a$ :  $\tau_4 = 0$ ,  $q = 3$  und für den Aufwärtswandler  $\tau_1 = 0$ ,  $q = 3$ . Ähnliche Übergangsbedingungen treffen auf das Umschalten zwischen Abwärtswandler oder Aufwärts-/Abwärtswandler und Inverter bei  $u_e = 0$  zu. Bei kontinuierlichem Verlauf der Eingangsspannung ist also der kontinuierliche Zustand auch stetig und selbst der Übergang der Aktivierungsdauern ist stetig. Dadurch sind an den Umschaltgrenzen zwischen den Architekturen keine weiteren Bedingungen zu erfüllen.

Die Zeitsteuerung eignet sich sehr gut zur Nachbildung von Kapazitäten und Widerständen. Die Nachbildung von Induktivitäten erfordert die Bildung der Ableitung des Wandlereingangsstroms. Dies ist in der Regel mit technischen Schwierigkeiten verbunden, da sich die Ableitung des Eingangsstroms aus der Ableitung des gemittelten Eingangsstroms und den Anstiegen des Eingangsstroms innerhalb eines Zyklusses zusammensetzt. Die Anstiege innerhalb eines Zyklusses sind Störgrößen, die deutlich größer als die Ableitung des gemittelten Eingangsstroms sind. Zur Nachbildung von Induktivitäten ist entweder eine geeignete Filterung oder die nachfolgend beschriebene

Ereignissteuerung zu verwenden.

### Ereignissteuerung

Bei Anwendung der Stromregelung ist zur Generierung von Impedanzen die in Bild 4.8 dargestellte spannungsgesteuerte Stromquelle nachzubilden. Dann besteht der Block  $Y$  im Bild aus dem Wandler und dem System zur Generierung des mittleren Spulenstroms.

Es existiert nur eine Stellgröße  $i_{Lm,\tau_m}$ . Deshalb läßt sich für die nachzubildenden Impedanzen eine explizite Gleichung für  $i_{Lm,\tau_m}$  oder wenigstens eine Differentialgleichung dafür angeben. Einsetzen der UI-Relationen aus Abschnitt 4.5.3 in die stationären Wandlerkenngrößen aus Abschnitt 4.5.2 liefert die in Tab. 4.3 dargestellten Ergebnisse. Bei der Ereignissteuerung läßt sich die Parallelschaltung von Impedanzen

Wandlertyp	Widerstand	Induktivität
Aufwärts	$i_{Lm,\tau_m} = \frac{u_e}{R}$	$\frac{d}{dt} i_{Lm,\tau_m} = \frac{u_e}{L}$
Abwärts	$i_{Lm,\tau_m} = \frac{u_e^2}{U_a R}$	$\frac{d}{dt} i_{Lm,\tau_m} = \frac{i_{Lm,\tau_m}}{u_e} \frac{du_e}{dt} + \frac{1}{L} \frac{u_e^2}{U_a}$
Inverter	$i_{Lm,\tau_m} = \frac{u_e(U_a - u_e)}{U_a R}$	$\frac{d}{dt} i_{Lm,\tau_m} = -\frac{i_{Lm,\tau_m}}{U_a - u_e} \frac{du_e}{dt} + \frac{1}{L} \frac{u_e(U_a - u_e)}{U_a}$
Auf-/Abwärts	$i_{Lm,\tau_m} = \frac{u_e(U_a + u_e)}{U_a R}$	$\frac{d}{dt} i_{Lm,\tau_m} = \frac{i_{Lm,\tau_m}}{U_a + u_e} \frac{du_e}{dt} + \frac{1}{L} \frac{u_e(U_a + u_e)}{U_a}$
Wandlertyp	Kapazität	
Aufwärts	$i_{Lm,\tau_m} = C \frac{du_e}{dt}$	
Abwärts	$i_{Lm,\tau_m} = C \frac{u_e}{U_a} \frac{du_e}{dt}$	
Inverter	$i_{Lm,\tau_m} = C \left(1 - \frac{u_e}{U_a}\right) \frac{du_e}{dt}$	
Auf-/Abwärts	$i_{Lm,\tau_m} = C \left(1 + \frac{u_e}{U_a}\right) \frac{du_e}{dt}$	

Tabelle 4.3: Nachbildung verschiedener Impedanzen durch stromgesteuerte Wandler.

durch Addition der entsprechenden Ausdrücke für die Stellgröße realisieren.

Bei der Nachbildung von Induktivitäten erhält man eine Differentialgleichung für die Stellgröße, bei der die Ableitung der Stellgröße proportional zur Ableitung der Eingangsspannung  $u_e$  ist. Bei der Nachbildung von Kapazitäten ist die Stellgröße proportional zur Ableitung der Eingangsspannung, was zu Problemen in der technischen Realisierung führen kann.

Die prinzipielle Einsetzbarkeit der Stromsteuerung ist jedoch identisch mit der der Zeitsteuerung. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß der stationäre Zustand bei Änderung von  $i_{L,ref,m,\tau_m}$  innerhalb eines Zyklusses erreicht wird. Deshalb erlaubt die Stromsteuerung höhere Frequenzanteile des Eingangssignals bei akzeptabler Genauigkeit als die Zeitsteuerung. Begrenzend wirkt bei Stromsteuerung nur die endliche Anstiegsgeschwindigkeit des Spulenstroms. Im Gegensatz zum zeitgesteuerten Betrieb ist kein zusätzlicher Regler zur Bedämpfung des dynamischen Verhaltens des Wandlers nötig.



# Kapitel 5

## Zusammenfassung und Ausblick

### 5.1 Zusammenfassung

Hybride Systeme können komplexes Verhalten zeigen. Für diskret gesteuerte kontinuierliche Systeme, bei denen der kontinuierliche Zustand stetig ist, wurde ein allgemeines Modell vorgestellt. Dieses ist zur Verhaltensanalyse geeignet. Zum Entwurf von äußeren Reglern oder Modulationssequenzen ist dieses Modell jedoch zu kompliziert in der Handhabung. Bekannte einfachere Modelle, wie gemittelte Modelle und iterierte Abbildungen lassen sich aus dem allgemeinen Modell ableiten. Diese beiden Modelle wurden in der Arbeit teilweise erweitert und für Entwurfszwecke verwendet. Die Entwurfsaufgaben bezüglich der Steuerung/Regelung lassen sich in zwei Klassen einteilen: den Entwurf der stationären Steuerung zur Erfüllung von EMV-Vorschriften und den Entwurf der Regelung zum Erreichen des stationären Zustands.

#### Stationäre Steuerung

Zur Modellierung des Verhaltens ist der Zeitverlauf des kontinuierlichen Zustands im stationären Zustand nachzubilden. Dies ist effizient durch Nutzung gefilterter Impulsprozesse möglich. Die Auswirkung eines modulierenden Eingriffes in das System wurde mit periodischen und chaotischen Signalen untersucht. Ein einfaches Modell zur Generierung chaotischer Signale besteht aus einer iterierten Abbildung. Zur Beurteilung des Leistungs(dichte)spektrums wurden verschiedene Gütefunktionale vorgestellt. Diese basieren teilweise auf dem berechneten Leistungs(dichte)spektrum und

teilweise auf einfacheren statistischen Kenngrößen des Prozesses. Speziell zur effizienten groben Bewertung des Leistungsdichtespektrums nichtperiodisch getakteter hybrider Systeme wurden einfach berechenbare Kriterien angegeben, die auf statistischen Kenngrößen des Prozesses basieren. Diese ermöglichen eine schnellere Bewertung der erreichten Ergebnisse, da deren Berechnung ohne die Berechnung des Leistungsdichtespektrums möglich ist und somit erheblich Rechenzeit einspart. Sie basieren auf der Entwicklung der Dichten der Ereigniszeiten.

Die Modulation des Systems im stationären Zustand hat meist Auswirkungen auf die Regelgröße des Systems. Dadurch entsteht in vielen Fällen eine unerwünschte Wechselwirkung zwischen der Regelung und der stationären Steuerung. In der Arbeit wurden Steuerschemata und deren Realisierungen vorgestellt, die Regelung und stationäre Steuerung voneinander entkoppeln. Die Anwendung dieser Steuerschemata erlaubt den separaten und voneinander unabhängigen Entwurf von Regelung und stationärer Steuerung.

Für den Fall der Anwendung chaotischer Modulationssignale wurde eine Methodik zum systematischen schaltungstechnischen Entwurf eindimensionaler stückweise linearer Abbildungen vorgestellt.

Für die Synthese von Modulationssignalen aus gegebenen Forderungen an das Leistungsspektrum oder Leistungsdichtespektrum existieren derzeit noch keine Lösungen. Als Ausweg wurde eine Optimierungsmethodik zur Ermittlung von Parametern parametrierbarer periodischer Signalverläufe und auch von beliebigen periodischen Signalen unter Berücksichtigung von Forderungen an das Leistungsspektrum, wie vorgegebene Grenzkurven, und einige damit erzielte Ergebnisse vorgestellt. Die Anwendung dieser Methodik zur Parametrierung chaotischer Abbildungen wurde gezeigt.

### **Reglerentwurf**

Ziel war es, den Reglerentwurf auch auf chaotische Systeme zu erweitern. Dazu wurde die Entwicklung von statistischen Kenngrößen des kontinuierlichen Zustands berechnet. Eine solche Kenngröße ist die Dichte des kontinuierlichen Zustands, für die bei hybriden Systemen mit eindimensionalem kontinuierlichen Zustand ein Ausdruck für die Entwicklung gefunden werden konnte. Die stationäre Dichte des kontinuierlichen Zu-

stands wurde für Systeme mit eindimensionalem kontinuierlichen Zustand aus der stationären Dichte der iterierten Abbildung berechnet. Die stationäre Dichte des kontinuierlichen Zustands kann als Kriterium für die Großsignalstabilität verwendet werden. Die gemittelten Modelle wurden auf den Fall chaotisch arbeitender Systeme erweitert. Mit den in der Erweiterung angegebenen Näherungen können gemittelte Modelle zum Reglerentwurf für chaotische Systeme benutzt werden. Ein Optimierungsverfahren, das zur Bestimmung von linearen Reglerparametern und von Begrenzungsparametern von chaotischen Systemen verwendet werden kann, wurde vorgestellt. Aufgrund des hohen Rechenaufwandes, der zur Bestimmung der statistischen Kenngrößen erforderlich ist, ist dieses Verfahren im Moment auf einfache Systeme, deren Einschwingvorgang mit Regelung innerhalb weniger hundert Zyklen abgeschlossen ist, beschränkt.

Eine neuartige interessante Anwendung ist die verlustarme Generation beliebiger Impedanzen, Impedanzgänge und UI-Kennlinien mit hybriden Systemen der Leistungselektronik. Zu dieser Thematik wurden geeignete Ansteuerschemata vorgestellt. Insbesondere die verlustarme Nachbildung positiver und negativer Blindschaltenelemente kann z.B. zur Verringerung der Verluste in der Leistungsübertragung eingesetzt werden.

Als eigene Beiträge werden angesehen:

- Die Definition einer Klasse von hybriden Systemen, den diskret gesteuerten kontinuierlichen Systemen. Für diese Klasse wird in Abschnitt 2.1 ein allgemeines Modell vorgestellt, das einerseits die vollständige Modellierung des Systemverhaltens erlaubt und andererseits die Ableitung reduzierter Modelle ermöglicht.
- Die Systemanalyse mit gemittelten Modellen. Dabei werden in Abschnitt 2.2 die Voraussetzungen ermittelt, unter denen das gemittelte Modell das Verhalten des gemittelten Systemzustands exakt modelliert. Die Anwendbarkeit auf Systeme mit nicht konstanter Zyklusdauer wurde untersucht. Abschnitt 2.3 behandelt Erweiterungen zur Berücksichtigung von Welligkeiten im Stellsignal, d.h. überlagerter Ereignissteuerung. Insbesondere wird in diesem Abschnitt eine Vorgehensweise zur Ermittlung von erweiterten gemittelten Modellen bei beliebigem Ereignisgenerator vorgestellt. In Abschnitt 4.3 wird ein gemitteltes Modell für nichtperiodisch arbeitende DCCS vorgestellt. Dieses beschreibt die Entwick-

lung einer statistischen Kenngröße, dem Erwartungswert des kontinuierlichen Zustands.

- Der Systementwurf unter der Berücksichtigung der elektromagnetischen Verträglichkeit. Sowohl für periodischen Betrieb als auch für nichtperiodischen Betrieb werden Methoden zur Verbesserung der elektromagnetischen Verträglichkeit vorgestellt, die vorgeschriebene EMV-Vereinbarungen berücksichtigen.

Sowohl für periodischen als auch für nichtperiodischen Betrieb werden in Abschnitt 3.2.2 Gütefunktionale zur quantitativen Bewertung der elektromagnetischen Verträglichkeit vorgestellt, die vorgeschriebene EMV-Vereinbarungen berücksichtigen. In Abschnitt 3.3.2 werden wechselwirkungsarme Steuerschemata, die die Wirkung von Modulation und Regelung entkoppeln und den separaten unabhängigen Entwurf von Regelung und Modulation erlauben, vorgestellt.

#### **Periodischer Betrieb**

In Abschnitt 3.4.1 werden Methoden zur Ermittlung optimaler periodischer Modulationssignale vorgestellt. Mit diesen Methoden kann einerseits die maximale spektrale Leistung minimiert werden. Andererseits erlauben die dort vorgestellten Methoden die Anpassung des Leistungsspektrums an vorgegebene Grenzkurven.

#### **Nichtperiodischer Betrieb**

Zur Analyse werden statistische Kenngrößen, wie die Autokorrelationsfunktion, Dichten und Wahrscheinlichkeiten verwendet und berechnet. In Abschnitt 3.2.2 werden gemischte Berechnungsverfahren zur Berechnung des Leistungsdichtespektrums vorgestellt. Weiterhin wird die Nutzung einfach berechenbarer statistischer Kenngrößen zur groben Beurteilung spektraler Eigenschaften gezeigt. Durch Nutzung dieser Verfahren läßt sich der Entwurf effektivieren. In Abschnitt 3.4.3 wird die Abhängigkeit des Leistungsdichtespektrums von Parametern des verwendeten Chaosgenerators untersucht und es wird eine Optimierungsmethode zur Bestimmung von Parametern der iterierten Abbildung des Chaosgenerators unter Berücksichtigung von EMV-Richtlinien vorgestellt. Es stellte sich heraus, daß die besten Ergebnisse mit schwach chaotischen Signalen

erzielt werden. Zur Erzeugung schwach chaotischer Signale wird neben Parametersätzen für iterierte Abbildungen eine einfache Modifikation des Chaosgenerators gezeigt. Bei der Realisierung von Chaosgeneratoren erwächst die Notwendigkeit der schaltungstechnischen Realisierung von nichtlinearen Abbildungen. Dazu wird eine Methodik zum schaltungstechnischen Entwurf eindimensionaler stückweise linearer Abbildungen in Abschnitt 3.3.3 vorgestellt. Weiterhin wird ein weiterer, sehr einfacher Chaostaktgenerator mit einstellbarem Modulationsgrad vorgestellt.

- Die Nutzung statistischer Kenngrößen zum Reglerentwurf. Die klassische Regelungsaufgabe besteht in der Stabilisierung eines Fixpunktes oder eines periodischen Orbits. Bei nichtperiodisch arbeitenden Systemen wird es erforderlich, statistische Kenngrößen zur Verhaltensmodellierung zu benutzen. Dazu wird in Abschnitt 4.1 die Entwicklung der Dichte des kontinuierlichen Zustands sowie die stationäre Dichte des kontinuierlichen Zustands berechnet. In Abschnitt 4.2 wird ein Stabilitätskriterium für nichtperiodische Systeme basierend auf der Dichte des kontinuierlichen Zustands vorgestellt. Basierend auf statistischen Kenngrößen wird in Abschnitt 4.4 eine Methode zur Parametrierung von Reglern für nichtperiodische Systeme auf schnelles Einschwingen vorgestellt.
- Die verlustarme Generierung von Impedanzen mit hybriden Systemen der Leistungselektronik. Dies ist eine neue interessante Anwendung, die durch die Eigenschaften von DCCS möglich wird. In Abschnitt 4.5 werden geeignete Methoden zur Ansteuerung bei vorgegebenen nachzubildenden Impedanzen vorgestellt.

## 5.2 Ausblick

Derzeit bleiben noch einige Probleme offen. Ein solches Problem ist noch immer die Synthese von Modulationssequenzen bzw. iterierten Abbildungen aus gegebenen Parametern des Leistungs(dichte)spektrums. Hier wurde die parametrische Bestimmung mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens als Ausweg vorgestellt. Zukünftige Arbeiten können sich mit der direkten Ableitung von Parametern des Modulationssignals aus

gegebenen Parametern des Leistungsdichtespektrums beschäftigen.

Die vorgestellte Dichteentwicklung des kontinuierlichen Zustands hybrider Systeme kann auf Systeme mit mehreren kontinuierlichen Zuständen erweitert werden, um auf eine größere Anzahl hybrider Systeme anwendbar zu sein. Ebenso ist eine Erweiterung der Berechnung der stationären Dichte der kontinuierlichen Zustände hybrider Systeme mit mehreren kontinuierlichen Zuständen denkbar. Eine mögliche Vorgehensweise besteht darin, zunächst die stationäre Dichte der iterierten Abbildung zu ermitteln und anschließend aus dieser Dichte mit Hilfe der stückweisen Lösungen  $\hat{\mathbf{f}}$  der Differentialgleichungen für den kontinuierlichen Zustand die stationäre Dichte der kontinuierlichen Zustände zu berechnen.

Eine Erweiterung der Bestimmung von Regler- und Streckenparametern auf aufwendigere Systeme durch Anwendung effizienterer Gütefunktionale zur Optimierung ist ebenfalls denkbar. Weiterhin sind derzeit noch keine Untersuchungen zur Anwendung hybrider Reglerstrukturen für den äußeren Regler bekannt. Hybride Reglerstrukturen sind zur Verbesserung des dynamischen Verhaltens des Gesamtsystems denkbar. Ebenfalls könnte eine mehrdimensionale iterierte Abbildung zur Regelung des kontinuierlichen Zustands benutzt werden. Die Iteration der Abbildung kann z.B. durch den Ereignisgenerator ausgelöst werden.

# Literaturverzeichnis

- [Aka05] H. Akagi. The state-of-the-art of active filters for power conditioning. In *Proc. EPE'05*, Dresden, Germany, September 2005.
- [AQB02] J. Abu-Qahoug and I. Batarseh. Unified steady-state analysis of soft-switching DC-DC converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 17(5):684–691, September 2002.
- [BC98] S. Banerjee and K. Chakrabarty. Nonlinear modeling and bifurcations in the boost converter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 13(2):252–260, March 1998.
- [BD95] A. L. Baranovski and D. Daems. Design of one-dimensional chaotic maps with prescribed statistical properties. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(6):1585–1597, 1995.
- [BDG<sup>+</sup>05] J. Balcells, D. Gonzalez, J. Gago, A. Santolaria, J. C. Le Bunetel, D. Magnon, and S. Brehaut. Frequency modulation techniques for EMI reduction in SMPS. In *Proc. EPE'05*, Dresden, Germany, September 2005.
- [bel64] Procédé de réduction d'interférence. BE 000671928, November 1964.
- [BGGV98] M. Bernardo, F. Garofalo, L. Glielmo, and F. Vasca. Switchings, bifurcations, and chaos in DC/DC converters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 45(2):133–141, February 1998.
- [BGS<sup>+</sup>02] A. L. Baranovski, H. Güldner, W. Schwarz, J. Weber, and O. Woywode. On the trade-off of ripple and spectral properties of chaotic DC-DC

- converters. In *Proc. NOLTA'02*, pages 115–118, Xi'an, China, October 2002.
- [BK05] B. Bryant and M. K. Kazimierczuk. Modeling the closed-current loop of PWM boost DC-DC converters operating in CCM with peak current-mode control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 52(11):2404–2412, November 2005.
- [BK06] B. Bryant and M. K. Kazimierczuk. Voltage loop of boost PWM DC-DC converters with peak current-mode control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 53(1):99–105, January 2006.
- [BMSW00] A. L. Baranovski, A. Mögel, W. Schwarz, and O. Woywode. Chaotic control of a DC-DC-converter. In *ISCAS'00*, volume II, pages 108–112, Geneva, Switzerland, May 2000.
- [Boc00] C. Bock. Taktgeber zur Erzeugung eines im Frequenzspektrum verschliffenen Systemtaktes. EP0001217498A2, December 2000.
- [BRS03] M. Balestra, R. Rovatti, and G. Setti. Power spectrum density tuning in random and chaos-based timing signal modulation techniques with improved EMC. In *Proc. NDES'03*, pages 25–28, Scuol, Switzerland, May 2003.
- [BS] A. L. Baranovski and W. Schwarz. Chaotic and random point processes: Analysis design and applications to switching systems. *Stochastics and Dynamics*.
- [BS02] A. L. Baranovski and W. Schwarz. On spectral analysis of impulse process. In *Proc. NDES'02*, pages 37–40, Izmir, Turkey, June 2002.
- [BS03] A. L. Baranovski and W. Schwarz. Chaotic and random point processes: Analysis, design, and applications to switching systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 50(8):1081–1087, August 2003.
- [BSRS04] M. Balestra, S. Santi, R. Rovatti, and G. Setti. A generalized modulation law for generating constant-envelope spread-spectrum signals via

- frequency modulation. In *Proc. NDES'04*, pages 79–82, Évora, Portugal, May 2004.
- [BV92] D. Bedrosian and J. Vlach. Time-domain analysis of networks with internally controlled switches. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 39(3):199–212, March 1992.
- [CAC<sup>+</sup>00] P. Cvitanović, R. Artuso, F. Christiansen, P. Dahlqvist, R. Mainieri, H. H. Rugh, G. Tanner, G. Vattay, N. Whelan, and A. Wirzba. Classical and quantum chaos. <http://www.nbi.dk/ChaosBook/>, 2000. version 7.0.1.
- [Cah91] S. V. Cahill. Apparatus and method for reducing harmonic interference generated by a clock signal. US 5263055, November 1991.
- [CPB96] K. Chakrabarty, G. Poddar, and S. Banerjee. Bifurcation behavior of the buck converter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 11(3):439–447, May 1996.
- [CRS02] S. Callegari, R. Rovatti, and G. Setti. ADC-based design of chaotic truly random sources. In *Proc. NDES'02*, pages 5–9–5–12, Izmir, Turkey, June 2002.
- [CRS03a] S. Callegari, R. Rovatti, and G. Setti. Design of truly random sources on general purpose programmable hardware. In *Proc. ECCTD'03*, Krakow, Poland, September 2003.
- [CRS03b] S. Callegari, R. Rovatti, and G. Setti. Spectral properties of chaos-based FM signals: Theory and simulation results. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 50(1):3–15, January 2003.
- [CT97] W. C. Y. Chan and C. K. Tse. Study of bifurcations in current-programmed boost converters: From quasi-periodicity to period-doubling. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 44(12):1129–1142, December 1997.

- [CVS99] V. A. Caliskan, G. C. Verghese, and A. M. Stanković. Multifrequency averaging of DC-DC converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 14(1):124–133, January 1999.
- [Cyp] Cypress. *W48SI01-04 Spread Spectrum Motherboard Frequency Generator*.
- [dBV00] M. di Bernardo and F. Vasca. Discrete-time maps for the analysis of bifurcations and chaos in DC/DC converters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 47(2):130–143, February 2000.
- [Dea04] J. H. B. Deane. The buck converter planar piecewise isometry. In *Proc. NOLTA'04*, Fukuoka, Japan, November 2004.
- [DH90] J. H. B. Deane and D. C. Hamill. Instability, subharmonics, and chaos in power electronic systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 5(3), July 1990.
- [DT04] D. Dai and C. K. Tse. Existence of horseshoes in current-mode controlled boost converters. In *Proc. NOLTA'04*, Fukuoka, Japan, November 2004.
- [Emi] Standards for electromagnetic emission and immunity. <http://www.emcec.fi/standard.htm>.
- [Eri97] R. W. Erickson. *Fundamentals of Power Electronics*. Chapman & Hall, 1997.
- [FCF04] R. Flynn, P. Curran, and O. Feely. Nonlinear dynamics of charge pump phase-locked loops. In *Proc. NOLTA'04*, Fukuoka, Japan, November 2004.
- [Fem96] N. Femia. A robust and fast convergent interval analysis method for the calculation of internally controlled switching instants. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 43(3):191–199, March 1996.
- [FO96] E. Fossas and G. Olivar. Study of chaos in the buck converter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 43(1):13–25, January 1996.

- [FR94] O. Föllinger and G. Roppenecker. *Optimale Regelung und Steuerung*. Oldenbourg, 1994.
- [GG95] K. D. Göpel and D. Genz. *Die Konzeption von EMV Meßplätzen*. Franzis', 1995.
- [GJ02] H. R. Guduturi and J. J. Javanifard. Random frequency clock generator. US-Patent No. US 6,492,843, December 2002.
- [GKSB01] M. Götz, J. Krupar, W. Schwarz, and A. Baranovski. EMI suppression of capacitor-on-chip charge pump circuits based on chaotic clock signal generation. In *Proc. NOLTA'01*, Zao, Japan, October 2001.
- [Göt98] M. Götz. *Analyse des Frobenius-Perron-Operators und Korrelations-theorie stückweise linearer zeitdiskreter chaotischer Systeme*. PhD thesis, TU-Dresden, 1998.
- [GPM04] T. Geyer, G. Papafotiou, and M. Morari. On the optimal control of switch-mode DC-DC converters. In *Proc. HSCC'04*, pages 342–356, 2004.
- [GRB05] L. Göhler, S. Ritz, and S. Becker. A novel architecture for fast and EMC compliant power mosfet drivers in automotive applications. In *Proc. EPE'05*, Dresden, Germany, September 2005.
- [Hal69] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, 1969.
- [HB96] Hardin and Keith B. Spread spectrum clock generator. EP 0739089A2, European Patent, 1996.
- [HDJ92] D. C. Hamill, J. H. B. Deane, and D. J. Jefferies. Modeling of chaotic DC-DC converters by iterated nonlinear mappings. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 7(1):25–36, January 1992.
- [Hel04] M. Hellfeld. *Modellierung von DC-DC Wandlern*, 2004.

- [HFB94] K. B. Hardin, J. T. Fessler, and D. R. Bush. Spread spectrum clock generation for the reduction of radiated emissions. In *Proc. IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, pages 227–231, 1994.
- [HFB97] K B. Hardin, J. T. Fessler, and D. R. Bush. Design considerations of phase-locked loop systems for spread spectrum clock generation compatibility. In *Proc. ISEC'97*, Austin, August 1997.
- [His01a] I. A. Hiskens. Stability of hybrid system limit cycles: Application to the compass gait biped robot. In *Proc. Conference on Decision and Control*, pages 774–779, Orlando, Florida, December 2001.
- [His01b] I. A. Hiskens. Stability of limit cycles in hybrid systems. In *Proc. International Conference on System Sciences*, 2001.
- [His02] I. A. Hiskens. Systematic tuning of nonlinear power system controllers. In *Proc. International Conference on Control Applications*, pages 19–24, Glasgow, Scotland, September 2002.
- [HKS06a] M. Hellfeld, J. Krupar, and W. Schwarz. Calculation of the autocorrelation function of impulse processes. In *Proc. NDES'06*, pages 45–48, Dijon, France, June 2006.
- [HKS06b] M. Hellfeld, J. Krupar, and W. Schwarz. An improved PDS calculation procedure for hybrid systems. In *Proc. ISCAS'06*, pages 3109–3112, Kos, Greek, May 2006.
- [HP02] I. A. Hiskens and M. A. Pai. Power system applications of trajectory sensitivities. pages 1200–1205, 2002.
- [HR94] Douglas C. Hopkins and D. W. Root. Synthesis of a new class of converters that utilize energy recirculation. pages 185–190, 1994.
- [HS01] I. A. Hiskens and P. J. Sokolowski. Systematic modeling and symbolically assisted simulation of power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 16(2):229–234, May 2001.

- [HSS<sup>+</sup>98] S. Y. Hui, Y. Shrivastava, S. Sathiakumar, K. K. Tse, and H. S.-H. Chung. A comparison of nondeterministic and deterministic switching methods for DC-DC power converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 13(6):1046–1055, November 1998.
- [IEC] Iec 61967-4: Integrated circuits, measurement of electromagnetic emissions, 150khz to 1ghz. DIN, VDE.
- [Isa95] S. H. Isabelle. *A Signal Processing Framework for the Analysis and Application of Chaotic Systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, February 1995.
- [IW97] S. Isabelle and G. Wornell. Statistical analysis and spectral estimation techniques for one-dimensional chaotic signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(6), June 1997.
- [JG00] J. Javanifard and H. Giduturi. Random frequency clock generator. WO02/27917, September 2000.
- [Kam04] S. I. Kamau. *Modelling, Analysis and Design of Discretely Controlled Switched Positive Systems*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, 2004.
- [KBBL90] P. T. Krein, J. Bentsman, R. M. Bass, and B. L. Lesieutre. On the use of averaging for the analysis of power electronic systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 5(2):182–190, April 1990.
- [KBJ<sup>+</sup>98] A. Kohling, G. Balzer, B. Jäkel, A. Kern, D. Möhr, K. P. Müller, A. Oehler, D. Rahmes, W. Rudolph, and G. Zimmer. *EMV von Gebäuden, Anlagen und Geräten*. VDE-Verlag Berlin und Offenbach, 1998.
- [KG01] J. Krupar and M. Götz. Automatisierter parametrischer Entwurf von LDO-Reglern in High-Voltage ASICs. In *E.I.S.'01*, volume 164, pages 171–176, Dresden, Germany, April 2001.
- [Kil91] T. Kiliyas. *Eindimensionale zeitdiskrete chaotische Abbildungen*. PhD thesis, TU-Dresden, October 1991.

- [KLSS06] J. Krupar, J. Lunze, A. Schild, and W. Schwarz. Analysis of discretely controlled continuous systems by means of embedded maps. *IEE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E89-A(10):2697–2705, October 2006.
- [KMAO] D. Karagiannis, E. Mendes, A. Astolfi, and R. Ortega. An experimental comparison of several PWM controllers for a single-phase AC-DC converter.
- [KMS04a] J. Krupar, A. Mögel, and W. Schwarz. Analysis of hybrid systems by means of embedded return maps. In *Proc. ISCAS'04*, volume V, pages 656–659, Vancouver, Canada, May 2004.
- [KMS04b] J. Krupar, A. Mögel, and W. Schwarz. Continuous-discrete systems – modelling and statistical analysis. In *Proc. NOLTA'04*, Fukuoka, Japan, November 2004.
- [KMS04c] J. Krupar, A. Mögel, and W. Schwarz. EMI-performance of DC-DC converters – criteria and spectral optimisation. In *Proc. NOLTA'04*, Fukuoka, Japan, November 2004.
- [KMS04d] J. Krupar, A. Mögel, and W. Schwarz. Spreizspektrum-Taktgenerator. DE 10 2004 033 596.6, July 2004.
- [Kra00] H. Krattenmacher. *Zur Messung leitungsgeführter Störgrößen in der EMV*. PhD thesis, 2000.
- [Kru01] J. Krupar. Analyse des EMI-Spektrums nichtperiodisch getakteter Hochvoltsschaltungen. Master's thesis, TU-Dresden, November 2001.
- [KS02a] J. Krupar and W. Schwarz. Designing the EMI performance of mixed signal circuits by nonperiodic clocking. In *Proc. SDA'02*, pages 11–17, Pirna, Germany, April 2002.
- [KS02b] J. Krupar and W. Schwarz. Reducing the EMI of mixed signal circuits by nonperiodic clocking. In *Proc. NDES'02*, pages 2–77–2–80, Izmir, Turkey, June 2002.

- [KS02c] J. Krupar and W. Schwarz. Reduzierung der Störabstrahlung einer Ladungspumpe durch nichtperiodische Taktgenerierung. In *Proc. Analog'02*, pages 409–414, Bremen, Germany, May 2002.
- [KS03a] J. Krupar and W. Schwarz. Discrete time and continuous time modelling of a DC-DC converter – a comparison. In *Proc. NDES'03*, pages 145–148, Scuol, Switzerland, May 2003.
- [KS03b] J. Krupar and W. Schwarz. Spread spectrum clock generation – chaotic and periodic modulation schemes. In *Proc. ECCTD'03*, pages 235–238, Krakow, Poland, September 2003.
- [KS04] J. Krupar and W. Schwarz. Cascaded return map models a nonperiodically clocked CPM boost converter. In *Proc. NDES'04*, pages 214–218, Evora, Portugal, May 2004.
- [KS05] J. Krupar and W. Schwarz. A performance estimation method for chaotic spread spectrum clock processes. In *Proc. ISCAS'05*, pages 3383–3386, Kobe, Japan, May 2005.
- [KS06a] J. Krupar and W. Schwarz. Cascaded return map models a nonperiodically clocked CPM boost converter. *Springer, Nonlinear Dynamics*, 44:109–116, 2006.
- [KS06b] J. Krupar and W. Schwarz. Controller optimization for hybrid systems by use of return maps. In *Proc. NOLTA'06*, pages 271–274, Bologna, Italy, September 2006.
- [KS06c] J. Krupar and W. Schwarz. EMI tuning of hybrid systems by periodic patterns. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 53(9):2060–2067, September 2006.
- [KSSJ01] J. Krupar, R. Srowik, R. Schüffny, and U. Jörges. Minimizing charge injection in high-precision, high-speed SC-circuits. In *Proc. ISCAS'01*, volume 1, pages 727–730, Sydney, Australia, May 2001.

- [KSSL06] J. Krupar, A. Schild, W. Schwarz, and J. Lunze. Modelling a class of hybrid systems by return maps. In *Proc. NOLTA'06*, pages 59–62, Bologna, Italy, September 2006.
- [KSV91] J. G. Kassakian, M. F. Schlecht, and G. C. Verghese. *Principles of Power Electronics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
- [KTD05] T. Kilić, B. Terzić, and M. Despalatović. Active power filter for harmonic distortion compensation of induction motors with soft starting. In *Proc. EPE'05*, Dresden, Germany, September 2005.
- [LB96a] B. Lehman and R. M. Bass. Extensions of averaging theory for power electronic systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 11(4):542–553, July 1996.
- [LB96b] B. Lehman and R. M. Bass. Switching frequency dependent averaged models for PWM DC-DC converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 11(1):89–98, January 1996.
- [LY03] Q. Li and F. Yuan. Time-domain response and sensitivity of periodically switched nonlinear circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 50(11):1436–1446, November 2003.
- [Mäu88] R. Mäusl. *Analoge Modulationsverfahren*. Hütig Verlag Heidelberg, 1988.
- [MJE96] Dragan Maksimović, Yungtaek Jang, and Robert W. Erickson. Nonlinear-carrier control for high-power-factor boost rectifiers. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 11(4):578–584, July 1996.
- [MKS05] A. Mögel, J. Krupar, and W. Schwarz. EMI performance of spread spectrum clock signals with respect to the IF bandwidth of the EMC standard. In *Proc. ECCTD'05*, pages I-169–I-172, Cork, Ireland, September 2005.

- [MPRS04] L. A. D. Michele, F. Pareschi, R. Rovatti, and G. Setti. A chaos-driven PLL based spread spectrum clock generator. In *Proc. NOLTA'04*, Fukuoka, Japan, November 2004.
- [MRK97] A. Massarani, U. Reggiani, and M. K. Kazimierczuk. Analysis of networks with ideal switches by state equations. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 44(8):692–697, August 1997.
- [MSK96] A. Mögel, W. Schwarz, and S. A. Kaschenko. Analysis and simulation principles for chaotic systems containing delay elements. In *Proc. NDES'96*, pages 453–458, Sevilla, Spain, 1996.
- [Phi63] E. Phillippow. *Nichtlineare Elektrotechnik*. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig, 1963.
- [Pla] Kurze Geschichte der Zeit. <http://www.geo.de/GEO/kultur/geschichte/5017.html?p=2>.
- [PvJ01] J. Paramesh and A. von Jouanne. Use of sigma-delta modulation to control EMI from switch-mode power supplies. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48(1):111–117, February 2001.
- [Ris96] H. Risken. *The Fokker-Planck equation*. Springer, 1996.
- [RME95] M. Rastogi, N. Mohan, and A.-A. Edris. Filtering of harmonic currents and damping of resonances in power systems with a hybrid-active filter. pages 533–538, 1995.
- [RSC02] R. Rovatti, G. Setti, and S. Callegari. Limit properties of folded sums of chaotic trajectories. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 49(12):1736–1744, December 2002.
- [Rus93] D. M. Russel. Verfahren zur steuerung eines synchronen elektrischen systems und synchrones elektrisches system mit zufallstaktsignal. DE 69323421T2, March 1993.

- [SBR00] G. Setti, M. Balestra, and R. Rovatti. Experimental verification of enhanced electromagnetic compatibility in chaotic FM clock signals. In *ISCAS'00*, volume III, pages 229–232, Geneva, Switzerland, May 2000.
- [SBR04] S. Santi, M. Bassani, R. Rovatti, and G. Setti. Generation of optimal constrained switching pattern for single-phase inverter. In *Proc. NOLTA'04*, Fukuoka, Japan, November 2004.
- [SEK03] M. Senesky, G. Eirea, and T. J. Koo. Hybrid modelling and control of power electronics. In *Proc HSCC'03*, pages 450–465, 2003.
- [SHS<sup>+</sup>00] Y. Shrivastava, S. Y. Hui, S. Sathiakumar, H. S. h. Chung, and K. K. Tse. Harmonic analysis of nondeterministic switching methods for DC-DC power converters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 47(6):868–883, June 2000.
- [SLA02] A. M. Stankovic and H. Lev-Ari. Randomized modulation in power electronic converters. *Proceedings of the IEEE*, 90(5):782–799, May 2002.
- [SM02] M. Streitenberger and W. Mathis. About the spectral properties of binary signals with application to class-D audio amplifiers. In *Proc. ANALOG'02*, pages 87–92, Bremen, Germany, May 2002.
- [SRS03] S. Santi, R. Rovatti, and G. Setti. Advanced chaos-based frequency modulations for clock signals EMC tuning. In *Proc. ISCAS'03*, volume III, pages 112–115, 2003.
- [Sta93] A. M. Stanković. *Random Pulse Modulation with Applications to Power Electronic Converters*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, March 1993.
- [SVP95] A. M. Stankovic, G. C. Verghese, and D. J. Perreault. Analysis and synthesis of randomized modulation schemes for power converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 10(6):680–693, November 1995.

- [TFK96] C. K. Tse, S. C. Fung, and M. W. Kwan. Experimental confirmation of chaos in a current-programmed buck converter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 43(7):605–608, July 1996.
- [ThCHS00] K. K. Tse, H. S. h. Chung, S. Y. R. Hui, and H. C. So. Spectral characteristics of randomly switched PWM DC/DC converters operating in discontinuous conduction mode. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 47(4):759–769, August 2000.
- [TR89] F. D. Tan and R. S. Ramshaw. Instabilities of a boost converter system under large parameter variations. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 4(2):442–449, October 1989.
- [Val07] C. Valerius. AC-DC-Wandler mit adaptivem Eingangsverhalten für Nabendynamik und Seitenraddynamik. Master's thesis, TU-Dresden, 2007.
- [VDE] DIN VDE 0879-1. DIN, VDE.
- [Vid93] M. Vidyasager. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [VKS05] C. Valerius, J. Krupar, and W. Schwarz. Electronic power management for bicycles. In *Proc. EPE'05*, number 481, Dresden, Germany, September 2005.
- [VOS02] K. Viswanathan, R. Oruganti, and D. Srinivasan. A novel tri-state boost converter with fast dynamics. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 17(5):677–683, September 2002.
- [WCLvW05] S. Wang, R. Chen, F. C. Lee, and J. D. van Wyk. Improved passive filter configurations for high-frequency conducted EMI in power electronics. In *Proc. EPE'05*, Dresden, Germany, September 2005.
- [WGBS00] O. Woywode, H. Güldner, A. L. Baranovski, and W. Schwarz. Design rules for aperiodic boost converters. In *PCIM 2000*, pages 485–489, Nürnberg, Germany, June 2000.

- [Win95] R. W. Winter. *EMV nach VDE 0100*. VDE-Verlag Berlin und Offenbach, 1995.
- [WKF02] J. W. Woude, W. L. Koning, and Y. Fuad. On the periodic behavior of PWM DC-DC converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 17(4):585–595, July 2002.
- [WMK<sup>+</sup>95] H. Watanabe, M. Morikawa, Y. Kobayashi, T. Ishii, and Y. Sekine. The suppressing harmonic currents, magnetic-switch power supply. *Power Electronics Technology and Applications II*, pages 171–178, 1995.
- [Woy01] O. Woywode. *Dynamical bifurcations and invariant densities in power electronic systems*. PhD thesis, TU-Dresden, 2001.
- [WS86] G. Wunsch and H. Schreiber. *Stochastische Systeme*. Verlag Technik, Berlin, 1986.
- [WWG03] J. Weber, O. Woywode, and H. Güldner. Tailoring ripple and spectrum of chaotic dc-dc converters. In *Proc. EPE'03*, Toulouse, France, September 2003.
- [WWM<sup>+</sup>01] O. Woywode, J. Weber, A. Mögel, H. Güldner, A. L. Baranovksi, and W. Schwarz. Statistical analysis of chaotic DC-DC converters. In *Proc. EAIT'01*, Kharagpur, India, December 2001.
- [YS00] Z. Yang and P. C. Sen. Analysis of a novel bidirectional DC-to-AC inverter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 47(5):747–757, May 2000.
- [ZL02] F. Zare and G. Ledwich. A hysteresis current control for single-phase multilevel voltage source inverters: PLD implementation. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 17(5):731–738, September 2002.





## Lebenslauf

- geboren 1975 in Großröhrsdorf
- 09/1982 – 08/1986 Teiloberschule Geschwister Scholl in Goldbach
- 09/1986 – 08/1990 Polytechnische Oberschule Otto Buchwitz in Bischofswerda
- 09/1990 – 08/1994 Goethe-Gymnasium in Bischofswerda
- 09/1994 – 11/1995 Wehrrersatzdienst
- 01/1996 – 03/1996 Praktikum bei Schsische Maschinen und Sonderwerkzeuge GmbH  
Neukirch
- 10/1996 - 11/2001 Studium Elektrotechnik, Vertiefungsrichtung Mikroelektronik  
an der TU-Dresden
- 10/2000 - 11/2001 Praktikum und Diplom bei Alcatel Microelectronics  
Design Center Dresden
- 12/2001 – 07/2007 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Grundlagen  
der Elektrotechnik und Elektronik, Fakultt Elektrotechnik  
TU-Dresden
- seit 08/2007 Mitarbeiter der DMOS GmbH Dresden